Esercizio N. 1

Risolvere la seguente equazione logaritmica
$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$

Metodo del sistema

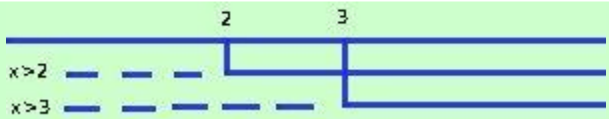
Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

risolvo

$$\begin{cases} x > 2 \\ x > 3 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioe'



$\boxed{x > 3}$

Adesso passo a risolvere l'equazione
$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$
Per la regola del logaritmo di un quoziente posso scrivere

$$\log \frac{x - 2}{x - 3} = \log 4$$

cioe', uguagliando gli argomenti

$$\frac{x - 2}{x - 3} = 4$$

Supponendo x diverso da 3 (sovrabbondante perche' x = 3 era gia' escluso dalle condizioni iniziali) faccio il m.c.m.

$x - 2 \qquad 4(x - 3)$

-------- = ----------------

x - 3 x - 3

tolgo i denominatori

$x - 2 = 4(x - 3)$

calcolo

$x - 2 = 4x - 12$

$x - 4x = 2 - 12$

$-3x = -10$

$x = 10/3$

Ora devo controllare che la soluzione cada nell'intervallo di definizione: 10/3 e' maggiore di 3 quindi la soluzione

$$x = \frac{10}{3}$$

e' accettabile

In qualche scuola ho visto anche risolverlo con un sistema in questo modo:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 3 > 0 \\ \log(x-2) - \log(x-3) = \log 4 \end{cases}$$

Formalmente e' piu' giusto ma come svolgimento e' la stessa cosa

Risolvere la seguente equazione logaritmica

$\log(x-2) - \log(x-3) = \log 4$

Metodo del controllo delle soluzioni

Per la regola del logaritmo di un quoziente posso scrivere

$$\log \frac{x - 2}{x - 3} = \log 4$$

cioe', uguagliando gli argomenti

$$\frac{x - 2}{x - 3} = 4$$

Supponendo x diverso da 3 (sovrabbondante perche' x = 3 era gia' escluso dalle condizioni iniziali) faccio il m.c.m.

$$\frac{x - 2}{x - 3} = \frac{4(x - 3)}{x - 3}$$

tolgo i denominatori

$x - 2 = 4(x - 3)$

calcolo

$x - 2 = 4x - 12$

$x - 4x = 2 - 12$

$-3x = -10$

$x = 10/3$

Ora devo controllare se la soluzione e' accettabile, per farlo sotituisco il valore 10/3 alla x nei logaritmi dell'equazione di partenza e controllo che gli argomenti siano positivi

Sostituisco in $\log(x-2)$

$\log (10/3 - 2) = \log 4/3$ l'argomento e' maggiore di zero

Sostituisco in $\log(x-3)$

$\log (10/3 - 3) = \log 1/3$ l'argomento e' maggiore di zero

Quindi

$$x = \frac{10}{3}$$

e' accettabile

Esercizio N. 2

Risolvere la seguente equazione logaritmica

$\log(x+1) + \log(x-1) = 0$

Metodo del sistema

Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

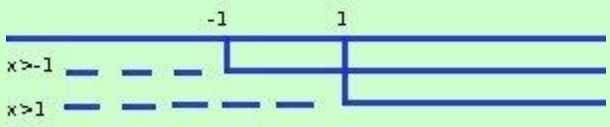
$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ \end{cases}$$

$x - 1 > 0$

risolvo

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioe'



$\boxed{x > 1}$

Adesso passo a risolvere l'equazione

$\log(x+1) + \log(x-1) = 0$

Per la regola del logaritmo di un prodotto posso scrivere

$\log (x-1)(x+1) = 0$

calcolo prima dell'uguale e, ricordando che zero e' il logaritmo di 1

$\log (x^2-1) = \log 1$

cioe', uguagliando gli argomenti

$x^2-1 = 1$

$x^2 = 2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Ora devo controllare se le soluzioni cadono nell'intervallo di definizione:

- la soluzione $x = -\sqrt{2}$ e' esterna all'intervallo di definizione perche' e' minore di 1 e quindi non e' accettabile
- la soluzione $x = +\sqrt{2}$ e' interna all'intervallo di definizione perche' e' maggiore di 1 e quindi e' accettabile

cioe' $x = +\sqrt{2}$ e' accettabile

Risolvere la seguente equazione logaritmica

$\log(x+1) + \log(x-1) = 0$

Metodo controllo delle soluzioni

Per la regola del logaritmo di un prodotto posso scrivere
$\log (x-1)(x+1) = 0$
calcolo prima dell'uguale e, ricordando che zero e' il logaritmo di 1
$\log (x^2-1) = \log 1$
cioe', uguagliando gli argomenti
$x^2-1 = 1$
$x^2 = 2$
$x = \pm\sqrt{2}$
Ora devo controllare se le soluzioni sono accettabili o meno sotituendole alle x nei logaritmi dell'equazione di partenza e controllando se cadono nell'intervallo di definizione:

- Sostituisco $x = -\sqrt{2}$
  $\log(x+1) = \log (-\sqrt{2} + 1)$
  essendo l'argomento minore di zero la soluzione non e' accettabile
  (non serve provare l'altro logaritmo perche' basta che uno solo non sia valido e non e' valida tutta l'equazione)
- Sostituisco $x = \sqrt{2}$
  $\log(x+1) = \log (\sqrt{2} + 1)$ argomento maggiore di zero
  $\log(x-1) = \log (\sqrt{2} - 1)$ argomento maggiore di zero
  essendo l'argomento maggiore di zero la soluzione e' accettabile

cioe' $x = +\sqrt{2}$ e' accettabile

Esercizio N.3

Risolvere la seguente equazione logaritmica
$\log_2(x+1) = \log_4(2x+5)$

Metodo del sistema

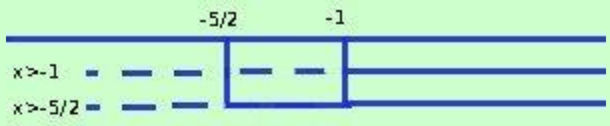
Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto le condizioni:

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ 2x + 5 > 0 \end{cases}$$

risolvo

$$\begin{cases} x > -1 \\ x > -5/2 \end{cases}$$

Essendo un sistema devo prendere l'intervallo dove sono valide contemporaneamente le disequazioni cioe'



$\boxed{x > -1}$

Adesso passo a risolvere l'equazione

$\log_2(x+1) = \log_4(2x+5)$

Siccome i logaritmi hanno base diversa dovro' applicare la regola del cambiamento di base. Conviene trasformare il secondo logaritmo da base 4 in base 2

Applico la regola

$$\log_4(2x+5) = \frac{\log_2(2x+5)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2x+5)}{2}$$

quindi posso scrivere

$\log_2(x+1) = 1/2\log_2(2x+5)$

e ricordando la regola del logaritmo di un radicale

$\log_2(x+1) = \log_2 \sqrt{(2x+5)}$

cioe', uguagliando gli argomenti

$(x+1) = \sqrt{(2x+5)}$

E' un'equazione irrazionale: elevo al quadrato da entrambe le parti

$(x+1)^2 = 2x+5$

sviluppo il quadrato

$x^2 + 2x + 1 = 2x+5$

$x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

ottengo le soluzioni

$x = 2 \qquad x = -2$

Per l'equazione irrazionale dovrei vedere se le soluzioni sono accettabili, pero' ho visto sempre che corrisponde all'accettabilita' della soluzione dell'equazione logaritmica

Per l'equazione logaritmica controllo che le soluzioni siano conprese nell'intervallo di definizione $x > -1$

La soluzione $x = 2$ e' accettabile perche' maggiore di -1

La soluzione $x = -2$ non e' accettabile perche' minore di -1

Risolvere la seguente equazione logaritmica

$\log_2(x+1) = \log_4(2x+5)$

Metodo del controllo delle soluzioni

Siccome i logaritmi hanno base diversa dovro' applicare la regola del cambiamento di base. Conviene trasformare il secondo logaritmo da base 4 in base 2

Applico la regola

$$\log_4(2x+5) = \frac{\log_2(2x+5)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(2x+5)}{2}$$

quindi posso scrivere

$\log_2(x+1) = 1/2\log_2(2x+5)$

e ricordando la regola del logaritmo di un radicale

$\log_2(x+1) = \log_2\sqrt{(2x+5)}$

cioe', uguagliando gli argomenti

$(x+1) = \sqrt{(2x+5)}$

E' un'equazione irrazionale: elevo al quadrato da entrambe le parti

$(x+1)^2 = 2x+5$

sviluppo il quadrato

$x^2 + 2x + 1 = 2x+5$

$x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 = 0$
$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
ottengo le soluzioni
$x = 2 \qquad x = -2$
Per l'equazione irrazionale dovrei vedere se le soluzioni sono accettabili, pero' ho visto che corrisponde all'accettabilita' della soluzione dell'equazione logaritmica
Ora devo controllare se le soluzioni sono accettabili, per farlo sotituisco i valori alla x nei logaritmi dell'equazione di partenza e controllo che gli argomenti siano positivi

- soluzione $x = -2$
  $\log_2(x+1) = \log(-2+1) = \log(-1)$
  Essendo l'argomento negativo la soluzione x=-2 non e' accettabile
  (non serve provare l'altro logaritmo perche' basta che uno solo non sia valido e non e' valida tutta l'equazione)
- soluzione $x = 2$
  $\log_2(x+1) = \log_2(2+1) = \log_2 3$
  $\log_4(2x+5) = \log_4[2(2)+5] = \log_4 9$
  Essendo gli argomenti positivi la soluzione $x = 2$ e' accettabile

Esercizo N. 3

Risolvere la seguente equazione logaritmica
$\log_3 x^4 + \log_3 x^3 + \log_3 x^2 + \log_3 x = 10$

Metodo del sistema

Siccome il logaritmo e' definito solamente se l'argomento e' maggiore di zero dovremo risolvere l'equazione sotto la condizione:
se vuoi vedere i calcoli

$\boxed{x > 0}$

Adesso passo a risolvere l'equazione
Per la regola del logaritmo di una potenza posso scrivere

$4\log_3 x + 3\log_3 x + 2\log_3 x + \log_3 x = 10$

cioe', sommando

$10\log_3 x = 10$

semplifico per 10

$\log_3 x = 1$

so che $1=\log_3 3$, perche' 3 elevato ad 1 da' 3, quindi

$\log_3 x = \log_3 3$

Eguaglio gli argomenti

$x = 3$

essendo 3 maggiore di zero la soluzione e' accettabile

Risolvere la seguente equazione logaritmica
$\log_3 x^4 + \log_3 x^3 + \log_3 x^2 + \log_3 x = 10$

Metodo del controllo delle soluzioni

Per la regola del logaritmo di una potenza posso scrivere
$4\log_3 x + 3\log_3 x + 2\log_3 x + \log_3 x = 10$
cioe', sommando
$10\log_3 x = 10$
semplifico per 10
$\log_3 x = 1$
so che $1=\log_3 3$, perche' 3 elevato ad 1 da' 3, quindi
$\log_3 x = \log_3 3$
Eguaglio gli argomenti
$x = 3$
Ora vado a sostituire 3 alla x e controllo che gli argomenti dei vari logaritmi siano maggiori di zero.

- $\log_3 x^4 = \log_3 3^4 = \log_3 81$ $81 > 0$
- $\log_3 x^3 = \log_3 3^3 = \log_3 27$ $27 > 0$
- $\log_3 x^2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$ $9 > 0$
- $\log_3 x = \log_3 3$ $3 > 0$

la soluzione $x = 3$ e' accettabile