La distribuzione gaussiana

In teoria della probabilità la **distribuzione normale**, o **Gaussiana** dal matematico tedesco Carl Friederich Gauss, è una distribuzione di probabilità continua che è spesso usata come prima approssimazione per descrivere variabili casuali a valori reali che tendono a concentrarsi attorno a un singolo valor medio. Il grafico della funzione di densità di probabilità associata è a forma di campana, nota come **Campana di Gauss** (o anche come **curva degli errori**, **curva a campana**, **ogiva**).

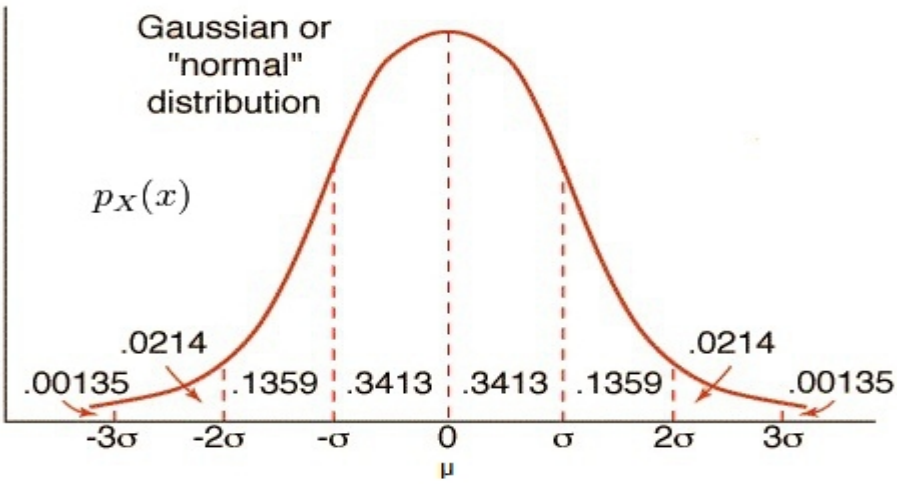
La distribuzione normale è considerata il caso base delle distribuzioni di probabilità continue a causa del suo ruolo nelteorema del limite centrale. Più specificamente, assumendo certe condizioni, la somma di *n* variabili casuali con media e varianza finite tende a una distribuzione normale al tendere di *n* all'infinito. Grazie a questo teorema, la distribuzione normale si incontra spesso nelle applicazioni pratiche, venendo usata in statistica e nelle scienze naturali e sociali[1] come un semplice modello per fenomeni complessi.
La distribuzione normale dipende da due parametri, la media μ e la varianza σ^2, ed indicata tradizionalmente con:

$$N(\mu;\sigma^2).$$

FORMULA

La distribuzione normale è caratterizzata dalla seguente **funzione di densità di probabilità**, cui spesso si fa riferimento con la dizione ***Curva di Gauss* o *gaussiana***:

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con} \quad -\infty < x < \infty$$



Dove **μ** è il valore atteso e **σ^2** la varianza

Questa formula rappresenta l'equazione della ben nota curva della distribuzione normale, o di Gauss, con la sua caratteristica forma a campana, che al variare dei parametri _ (media) e σ (scarto quadratico medio), ha un grafico che diventa più o meno schiacciato, ma sempre del tipo di quello rappresentato in figura. Ciò che rende spettacolare e ragguardevole questa "formula", o per essere più precisi, la distribuzione caratterizzata da questa funzione, è che si tratta di un vero e proprio ponte fra la
matematica ed il mondo reale. L'unico anello mancante è solamente il passaggio all'infinito, che appartiene alla matematica e non alla scienza del reale.
Supponiamo per esempio di effettuare una misurazione, una, due, tre, ... , n volte, e di avere uno strumento con un grado di precisione abbastanza elevato. Allora, a meno di barare o di commettere i cosiddetti errori sistematici, avremo sempre dei risultati differenti, dovuti all'inevitabile imprecisione del nostro strumento e del nostro operato, che sono detti errori accidentali. Ebbene, se rappresentiamo le misure che otteniamo su un grafico, e poi facciamo crescere il numero di misurazioni n sempre di più, al limite ad infinito, allora ci accorgeremmo che il grafico si avvicina sempre di più alla curva di Gauss, descritta proprio dall'equazione che stiamo considerando.
Si tratta solo uno degli innumerevoli esempi che si potrebbero mostrare riguardo alle applicazioni statistiche della distribuzione normale, di cui è impossibile descriverne tutte le proprietà in poche righe; ma è sufficiente a farne comprendere l'importanza, legata appunto al fatto che sia possibile, tramite il processo di limite, utilizzare gli strumenti della matematica per studiare il comportamento di fenomeni reali. Che il problema riguardi il lancio di una moneta, la propagazione di una malattia, od il risultato delle elezioni politiche, sul singolo caso non potremo mai dire nulla a meno di conoscerne l'esito, ma su una popolazione di milioni e milioni di soggetti (o di lanci, nel caso di una moneta), allora le leggi della statistica iniziano a funzionare, ed è possibile fare previsioni accurate

fino ad essere... quasi... matematicamente certe!

* **MEDIA :** In teoria della probabilità il **valore atteso** (chiamato anche **media**, **speranza** o **speranza matematica**) di una variabile casuale *X*, è un numero $\mathbb{E}[X]$ (con E iniziale dal francese *espérance*) che formalizza l'idea euristica di *valore medio* di un fenomeno aleatorio.

In generale il valore atteso di una variabile casuale discreta (che assuma cioè solo un numero finito o una infinità numerabile di valori) è dato dalla somma dei possibili valori di tale variabile, ciascuno moltiplicato per la probabilità di essere assunto (ossia di verificarsi), cioè è la media ponderata dei possibili risultati. Per una variabile casuale continua la questione è più delicata e si deve ricorrere alla teoria della misura e all'integrale di Lebesgue-Stieltjes.

Ad esempio nel gioco testa o croce, se scegliamo "testa" e ipotizziamo un valore di 100 per la vittoria (testa) e di zero per la sconfitta (croce), il valore atteso del gioco è 50, ovvero la media delle vincite e perdite pesata in base alle probabilità (50% per entrambi i casi): $100 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,5 = 50$, cioè il valore di "testa" per la sua probabilità e il valore di "croce" per la sua probabilità.

* **VARIANZA**: In teoria della probabilità e in statistica la **varianza** di una variabile aleatoria *X* (e della distribuzione di probabilità che questa segue) è un numero, indicato con **Var(*X*)**, che fornisce una misura di quanto siano vari i valori assunti dalla variabile, ovvero di quanto si discostino dalla media *E[X]*.

La varianza di *X* è definita come il valore atteso del quadrato della variabile aleatoria centrata *Y=X-E[X]*

$$\mathrm{Var}(X) = E[Y^2] = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$$

In statistica viene spesso preferita la radice quadrata della varianza di *X*, lo scarto tipo (o ***scarto quadratico medio***) indicato con la lettera σ. Per questo motivo talvolta la varianza viene indicata con σ^2.

Un esempio di "misura" dello scostamento di una variabile aleatoria dalla media è dato dal teorema di Čebyšëv che *controlla* questo scostamento in termini dello scarto tipo:

$$P\left(\left|X - E[X]\right| \geqslant \lambda\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}$$

DIMOSTRAZIONE MATEMATICA

Per dimostrare che $p_X(x)$ è effettivamente una funzione di densità di probabilità si ricorre innanzi tutto alla standardizzazione (statistica) della variabile casuale, cioè alla trasformazione tale per cui risulta:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

dove la variabile risultante $-\infty < Z < +\infty$ ha anch'essa distribuzione normale con parametri $\mu = 0$ e $\sigma = 1$. L'integrale della funzione di densità di probabilità della variabile casuale standardizzata Z è il seguente:

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Dato che deve necessariamente valere la condizione $S = 1$, allora risulta anche $S^2 = 1$ quindi:

$$S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p_Z(z)dz \int_{-\infty}^{+\infty} p_Y(y)dy$$

$$S^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2+y^2}{2}} dzdy$$

dove anche la variabile casuale Y ha distribuzione normale standardizzata. Per risolvere questo integrale doppio si ricorre alle coordinate polari $z = \rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$, dove $\rho \geq 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. La matrice Jacobiana della trasformazione è

$$J(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix},$$

il cui determinante è pari a $|J(\rho,\theta)| = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho$. Sostituendo nell'integrale di cui sopra si ottiene:

$$S^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{\rho^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{2}} |J(\rho,\theta)| d\rho d\theta = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho \, d\rho = 1$$

La sua funzione generatrice dei momenti è

$$g(x) = e^{\mu x + \sigma^2 \frac{x^2}{2}}$$

Il valore atteso e la varianza (che sono gli unici due parametri di questa variabile casuale) sono appunto μ e σ^2.

Non essendo possibile esprimere l'integrale della $p_X(x)$ in forma chiusa mediante funzioni elementari, è necessario rendere disponibili in forma tabellare i valori della sua funzione di ripartizione. I più usati sono:

68,3% = P{ $\mu - \sigma < X < \mu + \sigma$ }
95,0% = P{ $\mu - 1{,}96\,\sigma < X < \mu + 1{,}96\,\sigma$ }
95,5% = P{ $\mu - 2\,\sigma < X < \mu + 2\,\sigma$ }
99,0% = P{ $\mu - 2{,}58\,\sigma < X < \mu + 2{,}58\,\sigma$ }
99,7% = P{ $\mu - 3\,\sigma < X < \mu + 3\,\sigma$ }

Essendo $p_X(x)$ una funzione simmetrica è sufficiente conoscere la funzione di ripartizione dei valori positivi, per conoscere pure quella dei valori negativi (e viceversa).

Dalla variabile casuale Normale si possono ottenere altre variabili casuali, come la t di Student, la Chi Quadrato e la F di Snedecor, nonché le loro "varianti" non centrali (t non centrale,chi quadrato non centrale e F non centrale)

Teoremi

Se $X_1, X_2, ..., X_n$ sono *n* variabili casuali Normali tra di loro indipendenti, ciascuna con valore atteso μ_i e varianza σ^2_i, **allora** la variabile casuale $Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n$ è a sua volta una variabile casuale Normale con valore atteso $\mu = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2 + ... + \alpha_n\mu_n$ e varianza $\sigma^2 = \alpha^2_1\sigma^2_1 + \alpha^2_2\sigma^2_2 + ... + \alpha^2_n\sigma^2_n$

Altri teoremi: Teorema di Cochran

Variabili casuali derivate dalla Normale

Date n distribuzioni normali $Z_1(0;1)$; $Z_2(0;1)$; ... $Z_n(0;1)$ con media nulla e varianza unitaria indipendenti tra loro. allora

$$\chi^2_n = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2$$

è una Variabile casuale chi quadro con n gradi di libertà.

Siano $Z_1, Z_2, Z_3,...,Z_n$ variabili casuali indipendenti distribuite come una Normale con media nulla e varianza unitaria, e siano inoltre $a_1, a_2, a_3,...,a_n$ delle costanti tali che

$$\lambda = \sum a_i^2$$

allora si indica con χ'^2 la v.c. chi quadro non centrale con *n* gradi di libertà costruita come

$$\chi'^2 = \sum (Z_i + a_i)^2$$

Se Z~N(0;1) e X~χ^2_n, allora T=Z/√X/n è distribuita come una t di Student con *n* gradi di libertà.

Se Z~N(0;1) e $$T = \beta \left(\frac{\alpha Z}{2} + \sqrt{\frac{(\alpha Z)^2}{4} + 1} \right)^2$$ allora T è una v.c. di Birnbaum-Saunders con i parametri α e β.