ESERCIZI SVOLTI DI GEOMETRIA ANALITICA

A cura di Valter Gentile

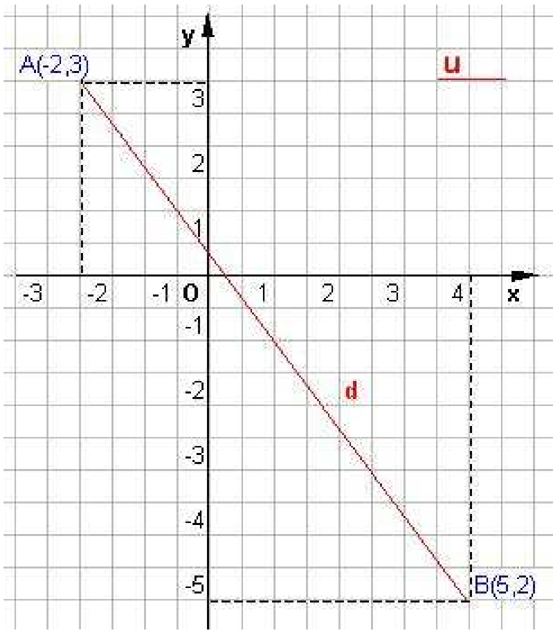
E-Notes pubblicata dalla Biblioteca Centrale di Ingegneria
Siena, 12 settembre 2006

Indice

LA RETTA E LE SUE APPLICAZIONI

Problema 1

Determinare la distanza tra i punti A(– 2 ; 3) e B(4 ; – 5).



Applicando la formula

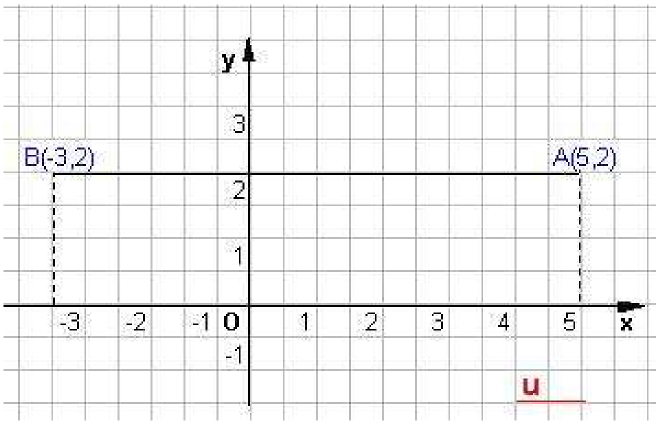
$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

della distanza tra due punti, si ottiene

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4+2)^2 + (-5-3)^2} =$$
$$= \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Problema 2

Determinare la distanza tra i punti A(5 ; 2) e B(–3 ; 2) .



Applicando la formula :

$$d = | x_B – x_A |$$

della distanza tra due punti aventi la stessa ordinata, si ottiene

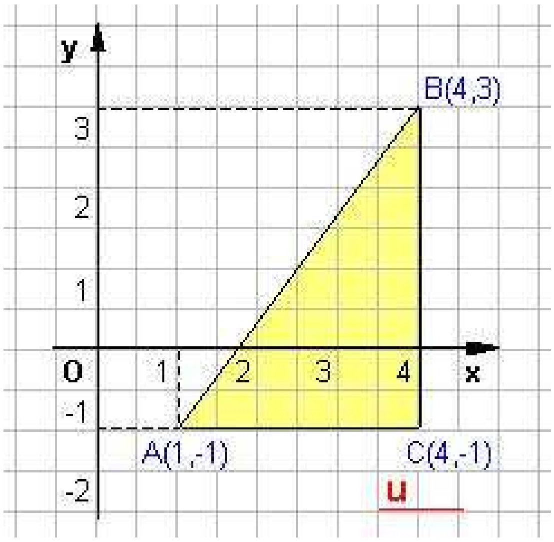
$d = | x_B – x_A | = | – 3 – 5 | = | – 8 | = 8$

Problema 3

Determinare il perimetro del triangolo di vertici A(1 ; –1), B(4 ; 3) e C(4 ; – 1).

Si applicano le formule della distanza tra due punti per trovare le misure dei lati AB, AC, BC del triangolo cioè $\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, e per punti che hanno ugual ordinata $d = | x_B – x_A |$ e per quelli che hanno ugual ascissa $d = | y_B – y_A |$. Si ottiene:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (3+1)^2} =$$
$$= \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$



AC = | $x_C - x_A$ | = | 4 –1 | = | 3| = 3
BC = | $y_B - y_C$ | = | 3 + 1 | = |4| = 4

Il perimetro del triangolo ABC è

2p (ABC) = 5 + 3 + 4 = 12

Problema 4

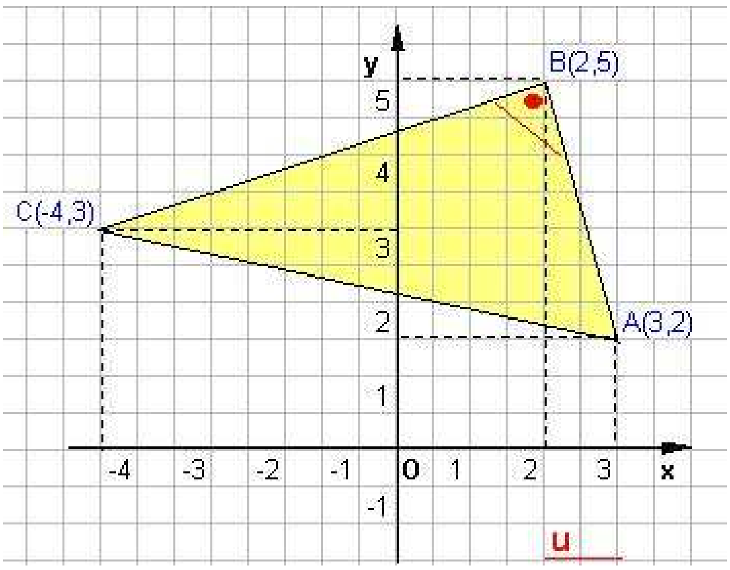
Verificare che il triangolo di vertici A(3 ; 2) , B(2 ; 5),C(– 4; 3) è rettangolo e determinarne l'area .

Applicando la formula **d** = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, della distanza tra due punti, si ottiene:

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

AC = $\sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{(-7)^2 + (1)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(-4-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$



Per verificare che il triangolo ABC è rettangolo, basta verificare il teorema di Pitagora , cioè l'identità

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Si ottiene 50 = 10 + 40 ; 50 = 50 .

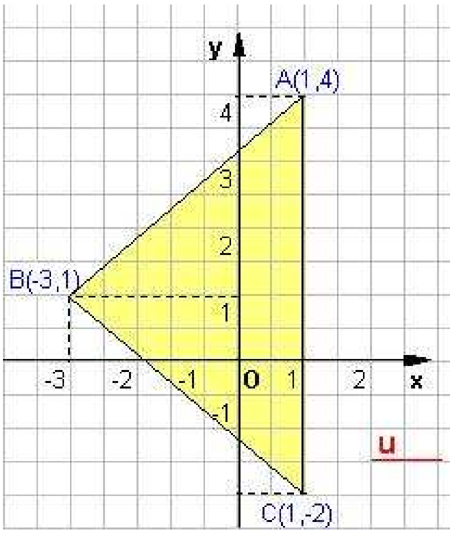
Dunque il triangolo ABC è rettangolo con ipotenusa AC.
L'area del triangolo è:

$$As = \frac{ABxBC}{2} = \frac{\sqrt{10}x\sqrt{40}}{2} = \frac{\sqrt{400}}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

Problema 5

Verificare che il triangolo di vertici A(1 ; 4) , B(–3 ; 1), C(1 ; –2) è isoscele e determinarne il perimetro.

Applicando le formule per trovare la distanza tra due punti, si ottiene



$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-4)^2} =$$
$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$AC = \sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-4)^2} =$$
$$= \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$
$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1+3)^2 + (-2-1)^2} =$$
$$= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Poichè risulta AB = BC, il triangolo è isoscele sulla base AC.

Il perimetro del triangolo ABC è
2p (ABC) = 5 + 5 + 6 = 16 .

Problema 6

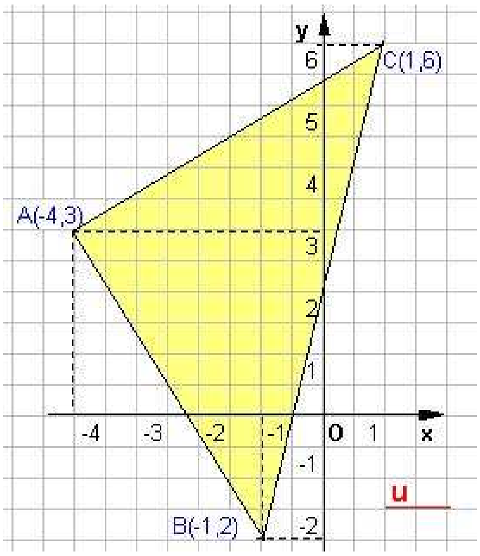
Verificare che il triangolo di vertici A(– 4 ; 3), B(–1 ; –2), C(1 ; 6) è isoscele e determinarne l'area.

Applicando la formula **d =** $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, della distanza tra due punti, si ottiene

AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(-1+4)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{(3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

AC = $\sqrt{(x_c - x_A)^2 + (y_c - y_A)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{(5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$

BC = $\sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} = \sqrt{(1+1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{(2)^2 + (8)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$



Poichè risulta AB = AC, il triangolo è isoscele sulla base BC.

Inoltre il triangolo ABC è rettangolo: infatti basta verificare il teorema di Pitagora , cioè l'identità

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

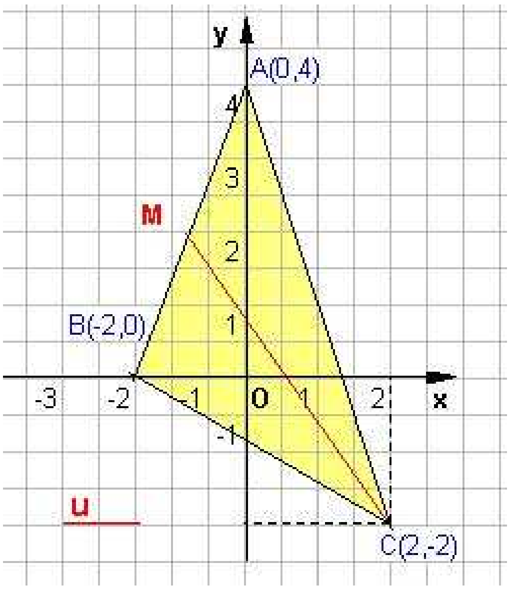
Si ottiene 68 = 34 + 34 ; 68 = 68 .
Dunque il triangolo ABC è rettangolo con ipotenusa BC.
L'area del triangolo è

$$As = \frac{ABxBC}{2} = \frac{\sqrt{34}x\sqrt{34}}{2} = \frac{34}{2} = 17$$

Problema 7

Determinare la mediana relativa al lato AB del triangolo di vertici A(0;4), B(–2;0), C(2 ;–2).

Sapendo che la mediana è il segmento che unisce un vertice con il punto medio del lato opposto, avremo:



Applicando le formule:

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad y_m = \frac{(y_2 + y_1)}{2}$$

per trovare le coordinate del punto medio di un segmento.

In questo caso per determinare le coordinate del punto medio M di AB si ha

$$x_m = \frac{(x_A + x_B)}{2} = \frac{0-2}{2} = -1$$

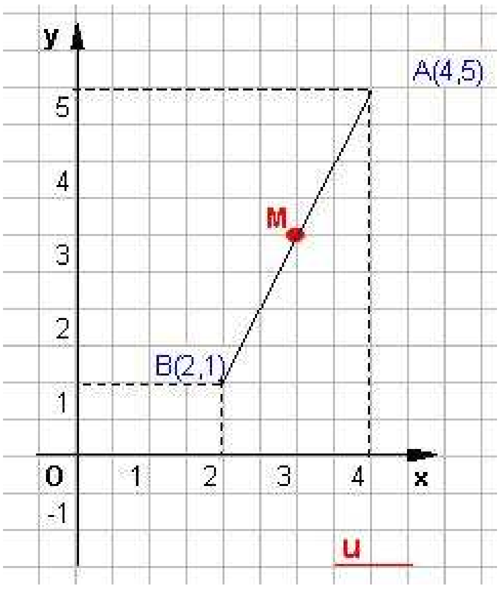
$$y_m = \frac{(y_A + y_B)}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$$ da cui **M (– 1 ; 2)**.

Per trovare la lunghezza della mediana CM basta applicare la formula della distanza tra due punti: si ottiene

d = CM = $\sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

Problema 8

Determinare le coordinate del punto medio M del segmento di estremi A(4 ; 5) e B(2 ; 1).



Applicando le formule:

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad y_m = \frac{(y_2 + y_1)}{2}$$

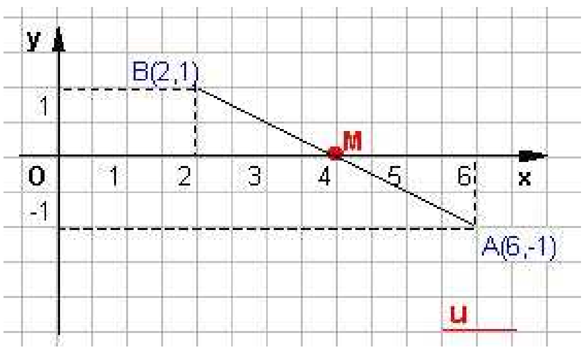
troviamo le coordinate del punto medio di un segmento.
In questo caso le coordinate del punto medio M di AB sono:

$$x_m = \frac{(x_A + x_B)}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$y_m = \frac{(y_A + y_B)}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$ da cui **M (3 ; 3)**.

Problema 9

Determinare le coordinate del punto medio M del segmento di estremi A(6;–1) e B(2;1).



Applicando le formule:

$$x_m = \frac{(x_1 + x_2)}{2} \qquad y_m = \frac{(y_2 + y_1)}{2}$$

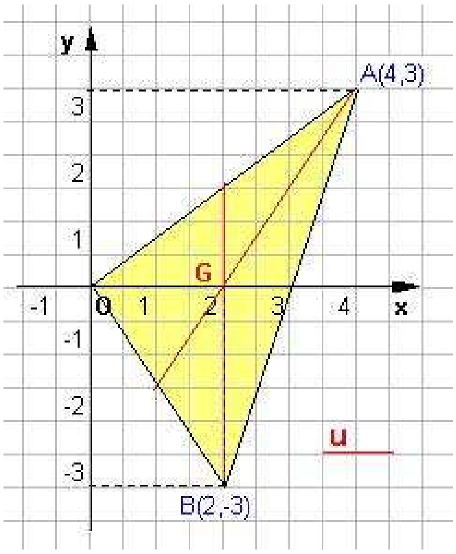
troviamo le coordinate del punto medio di un segmento.

In questo caso le coordinate del punto medio M di AB sono:

$$x_m = \frac{(x_A + x_B)}{2} = \frac{6+2}{2} = 4 \qquad y_m = \frac{(y_A + y_B)}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$$ da cui **M (4 ; 0)**.

Problema 10

Determinare le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici O(0;0), A(4;3), B(2 ;-3).



Il baricentro di un triangolo è il punto di incontro delle tre mediane.

Applicando le formule rispettivamente

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

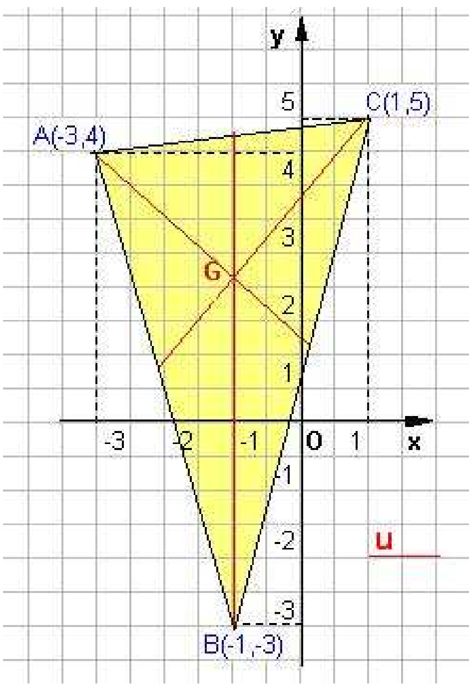
per trovare le coordinate del baricentro di un triangolo si ottiene

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{0+4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{0+3-3}{3} = 0$$ da cui **G (2 ; 0)** .

Problema 11

Determinare le coordinate del baricentro G del triangolo di vertici A(–3;4), B(–1;–3), C(1;5).



Applicando le formule rispettivamente

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{e} \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3};$$

per trovare le coordinate del baricentro di un triangolo si ottiene

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{-3-1+1}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

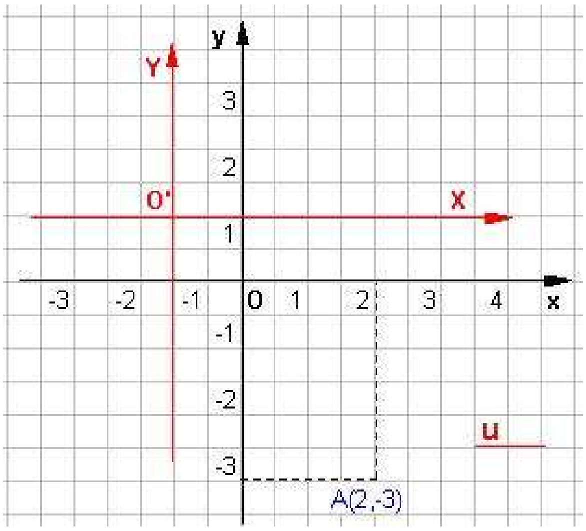
$$y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = \frac{4-3+5}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

da cui **G (–1 ; 2)** .

Problema 12

Trovare le coordinate di A (2 ; –3) nel sistema traslato XO'Y di origine O'(–1;1).

Applicando la formula della traslazione di assi



$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases} \quad \text{si ottiene il sistema} \quad \begin{cases} 2 = X - 1 \\ -3 = Y + 1 \end{cases}$$

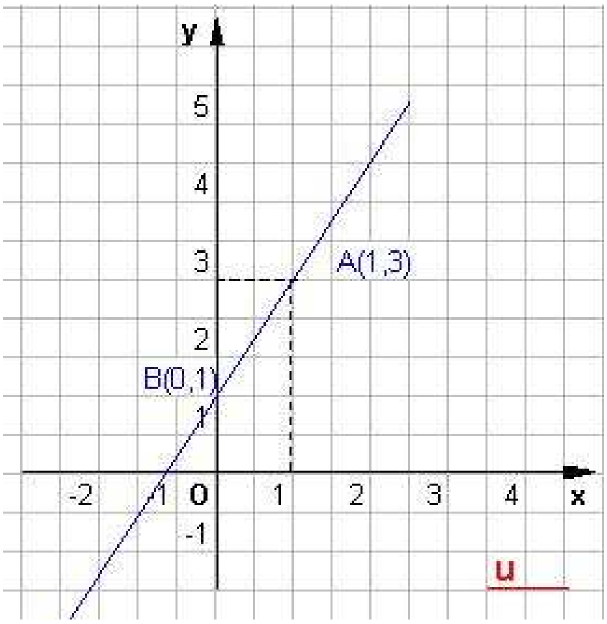
che ha per soluzione X = 3 e Y = – 4 .

Dunque le coordinate di A nel sistema X O'Y sono

A' (3 ; – 4) .

Problema 13

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(1;3) e B(0;1).



Applicando la formula per trovare il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse delle ordinate si ha $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cioè

$$m = \frac{1-3}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Quindi dalla formula esplicita y = mx + q, abbiamo y = 2x + q e poichè Q (0 , 1) si ha che sostituendo l'ordinata all'origine della retta è q = 1 .

Dunque l'equazione della retta è

y = 2x + 1.

Possiamo abbreviare il tutto applicando l'equazione generica della retta passante per due punti cioè:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

da cui $\frac{y-3}{x-1} = \frac{1-3}{0-1}$ in definitiva y – 3 = 2(x – 1) cioè

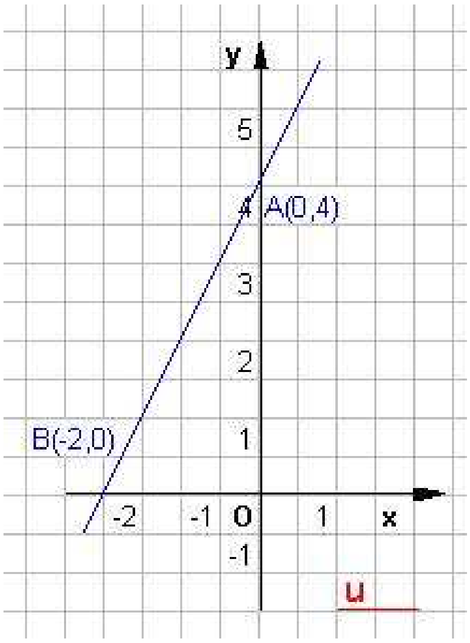
y = 2x +1

Problema 14

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(0;4) e B(–2;0).

Applicando la formula per trovare il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse delle ordinate si ha $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ cioè $m = \frac{0-4}{-2-0} = \frac{-4}{-2} = 2$

Quindi dalla formula esplicita y = mx + q, abbiamo y = 2x + q e poichè Q (–2,0) si ha che sostituendo l'ordinata all'origine della retta è q = 4 .
Dunque l'equazione della retta è y = 2x + 4.



.
Possiamo abbreviare il tutto applicando l'equazione generica della retta passante per due punti cioè:

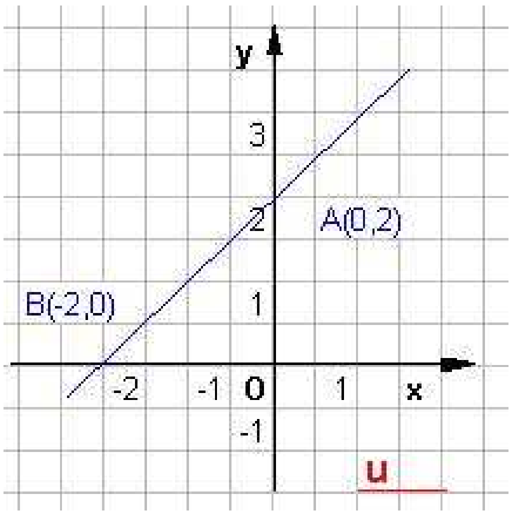
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

da cui $\frac{y-4}{x-0}=\frac{0-4}{-2-0}$ in definitiva y – 4 = 2x cioè
y = 2x + 4.

Problema 15

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(0;2) e B(-2;0).

Applicando la formula per trovare il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse delle ordinate si ha



$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ cioè } m=\frac{0-2}{-2-0}=\frac{-2}{-2}=1 .$$

Quindi dalla formula esplicita y = mx + q,
abbiamo y = x + q e poichè Q (-2 , 0) si ha che l'ordinata all'origine della retta è q = 2 .
Dunque l'equazione della retta è
y = x + 2.

Possiamo abbreviare il tutto applicando l'equazione generica della retta passante per due punti cioè:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

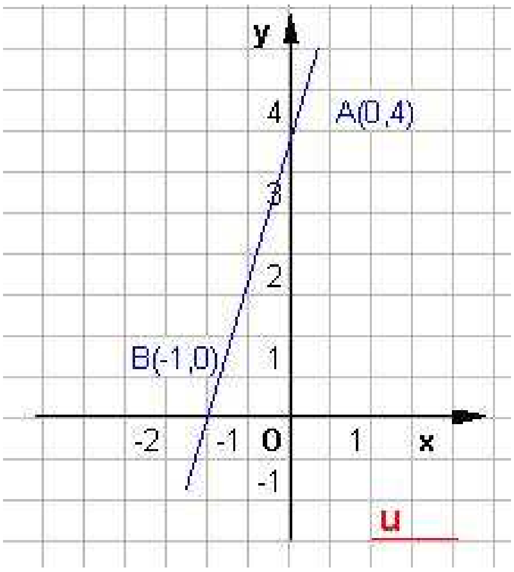
da cui $\frac{y-2}{x-0}=\frac{0-2}{-2-0}$ in definitiva y – 2 = x cioè
y = x + 2.

Problema 16

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(0;4) e B(-1;0).

Applicando la formula per trovare il coefficiente angolare di una retta non parallela all'asse delle ordinate si ha si ha

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{cioè} \quad m=\frac{0-4}{-1-0}=\frac{-4}{-1}=4$$



Quindi dalla formula esplicita y = mx + q, abbiamo y = 4x + q e poichè Q (–1, 0) si ha che sostituendo l'ordinata all'origine della retta è q = 4 .
Dunque l'equazione della retta è

y = 4x + 4.

Possiamo abbreviare il tutto applicando l'equazione generica della retta passante per due punti cioè:

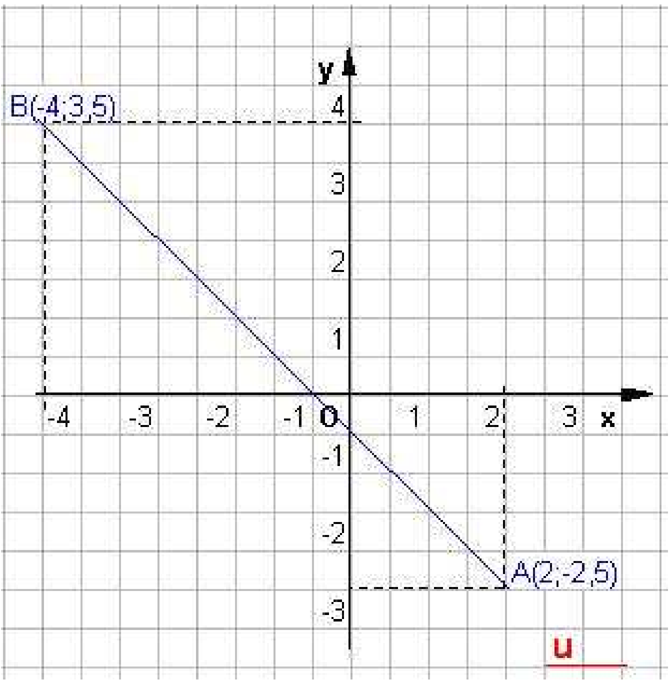
$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

da cui $\frac{y-4}{x-0}=\frac{0-4}{-1-0}$ in definitiva y – 4 = 4x cioè

y = 4x + 4.

Problema 17

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(2; –5/2) e B(–4;7/2).



Applicando la formula $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ per trovare l'equazione della retta passante per due punti si ha $\frac{y+\frac{5}{2}}{x-2}=\frac{\frac{7}{2}+\frac{5}{2}}{-4-2}$, da cui si ha $\frac{y+\frac{5}{2}}{x-2}=\frac{6}{-6}$

ossia $y+\frac{5}{2}=-(x-2)$ cioè

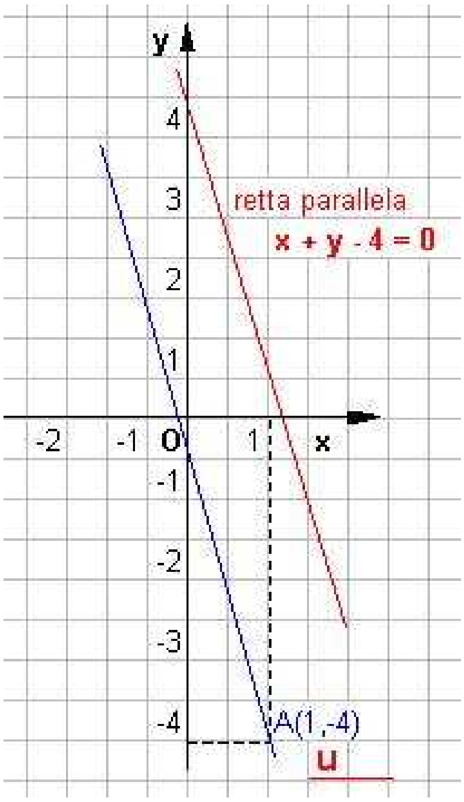
2y + 5 = –2(x – 2) concludendo

2y + 2x + 1 = 0 .

Problema 18

Determinare l'equazione della retta passante per il punto A(1;–4) e parallela alla retta 3 x + y – 4 = 0.

Per la condizione di parallelismo tra rette, la retta da trovare ha lo stesso coefficiente angolare della retta data. Dunque da 3x + y – 4 = 0 , si ottiene y = –3x + 4 e quindi m = –3 .

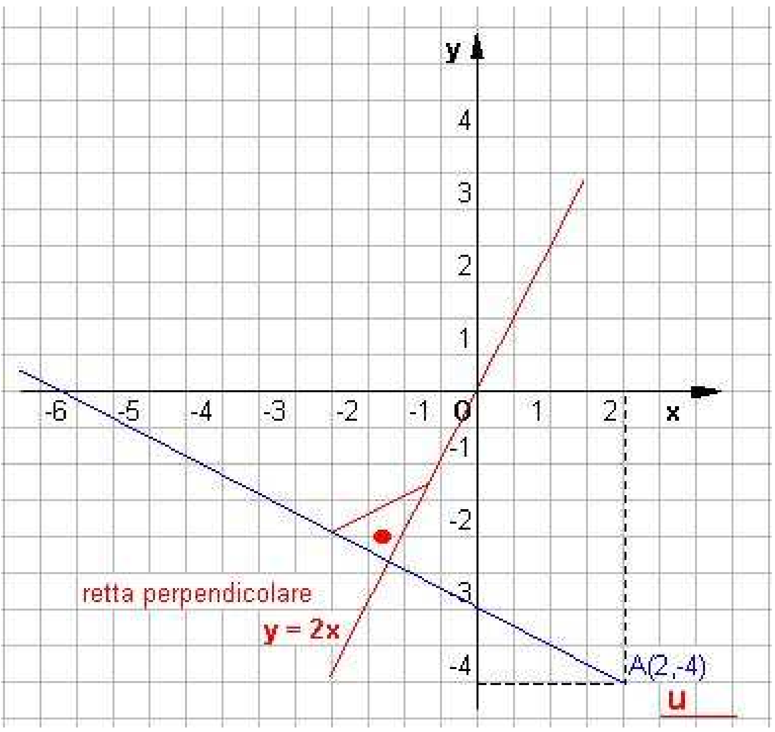


Poichè la retta deve passare per A(1,–4) dalla formula $y - y_1 = m(x - x_1)$ della retta per un punto di dato coefficiente angolare si ottiene
y + 4 = – 3 (x –1) , da cui si ha y = –3x –1 ossia

3x + y + 1 = 0 .

Problema 19

Determinare l'equazione della retta passante per il punto A(2;–4) e perpendicolare alla retta y = 2 x .



Per la condizione di perpendicolarità tra rette, la retta da trovare ha coefficiente angolare antireciproco di quello della retta data. Dunque dalla equazione y = 2x si trova che il coefficiente della retta perpendicolare è

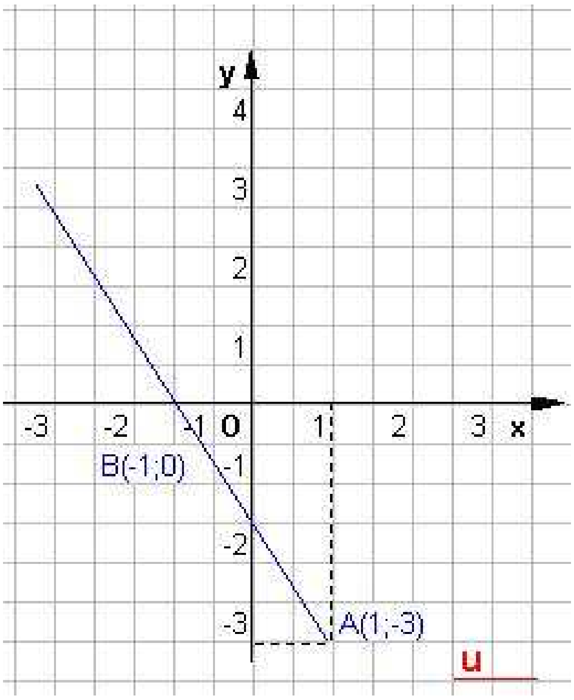
m’ = $-\frac{1}{m}$ cioè

m’ = $-\frac{1}{2}$.

Poichè la retta deve passare per P(2,–4) dalla formula $y - y_1 = m(x - x_1)$ della retta per un punto di dato coefficiente angolare si ottiene $y + 4 = -\frac{1}{2}(x - 2)$, da cui si ha 2y + 8 = – x + 2
ossia x + 2 y + 6 = 0 .

Problema 20

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(1;–3) e B(–1;0).



Applicando la formula $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ per trovare l'equazione della retta passante per due punti si ha $\frac{y+3}{x-1}=\frac{0+3}{-1-1}$,

da cui si ha $\frac{y+3}{x-1}=\frac{+3}{-2}$

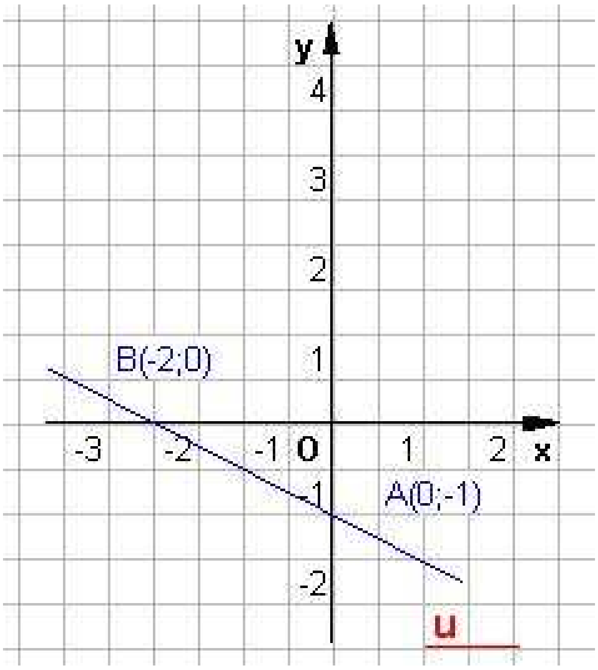
ossia $y+3=-\frac{3}{2}(x-1)$

Cioè 2y + 6 = –3x +3 e concludendo

3x +2y +3 = 0 .

Problema 21

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(0;–1) e B(–2;0).



Applicando la formula $\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ per trovare

l'equazione della retta passante per due punti si ha

$\frac{y+1}{x-0}=\frac{0+1}{-2-0}$,

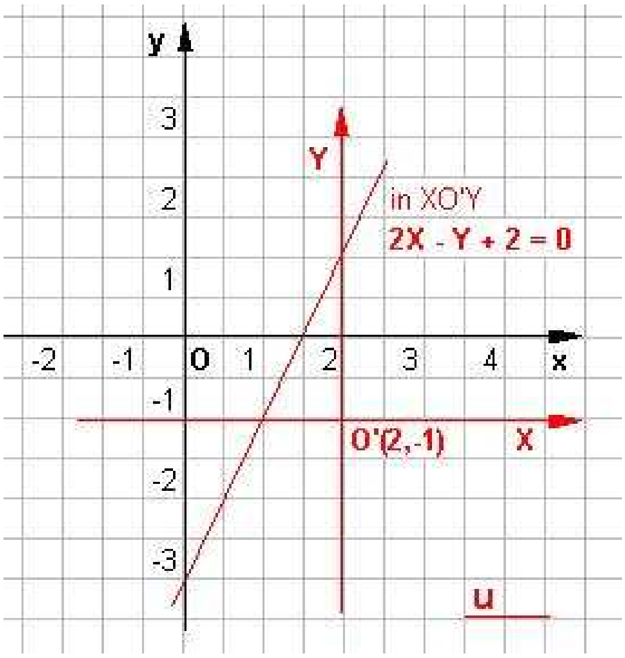
da cui si ha $y+1=-\frac{1}{2}x$,

ossia x +2y +2 = 0 .

Problema 22

Determinare l'equazione della retta 2X–Y+2 = 0 nel sistema xOy, sapendo che l'origine del sistema XO'Y è O' (2 ; –1).

Applicando le equazioni della traslazione di assi ,



$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases} \quad \text{si ottiene il sistema} \quad \begin{cases} X = x - 2 \\ Y = y + 1 \end{cases}$$

sostituendo le espressioni di X ed Y nella equazione della retta $2X - Y + 2 = 0$ si ottiene

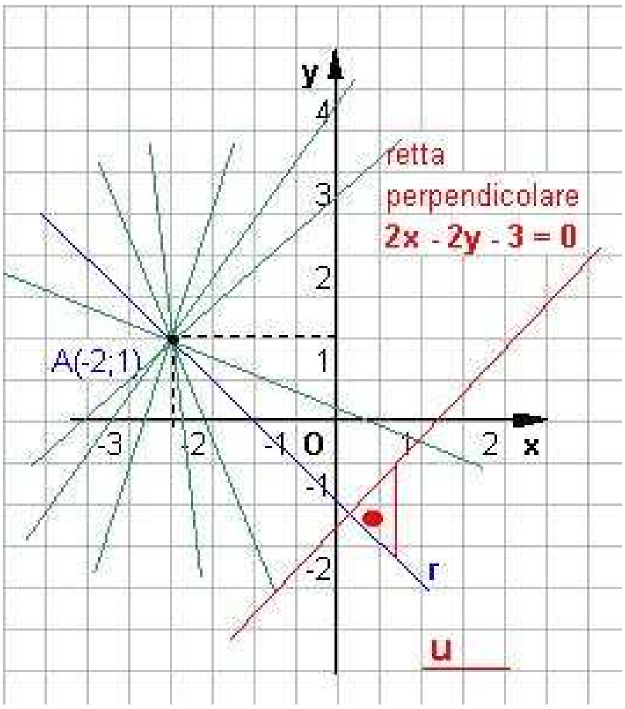
$2(x - 2) - (y + 1) + 2 = 0$.

Dunque l'equazione della retta è

$$-2x + y + 3 = 0.$$

Problema 23

Nel fascio di rette di centro A(–2 ; 1) determinare la retta r perpendicolare alla retta di equazione 2x – 2y – 3 = 0.



Si scrive l'equazione $y - 1 = m(x+2)$ del fascio proprio di rette di centro P.

Si ricava il coefficiente angolare della retta

$2x-2y-3=0$ cioè $m = -\frac{a}{b} = -\frac{-2}{2} = 1$.

Imponendo la condizione di perpendicolarità tra rette, il coefficiente angolare della retta r perpendicolare alla retta $2x - 2y - 3 = 0$ è

l'antireciproco $m' = -\frac{1}{m} = -1$.

Sostituendo tale valore al posto di m nell'equazione del fascio si ha $y - 1 = -1(x+2)$.

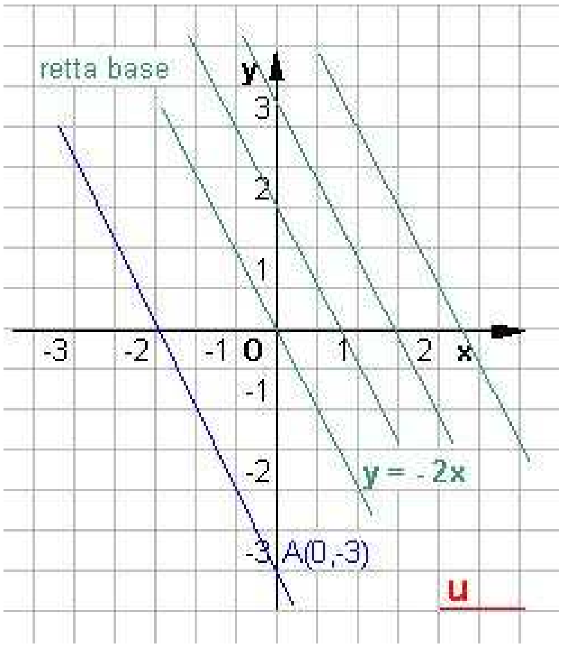
Dunque l'equazione della retta è

$$x + y + 1 = 0.$$

Problema 24

Nel fascio di rette parallele a y = –2x determinare la retta r passante per A(0; –3).

Scritta l'equazione del fascio improprio di rette parallele alla retta $y = -2x$, cioè $y = -2x + k$, si ottiene l'equazione della retta r imponendo il passaggio per il punto Q(0;–3).



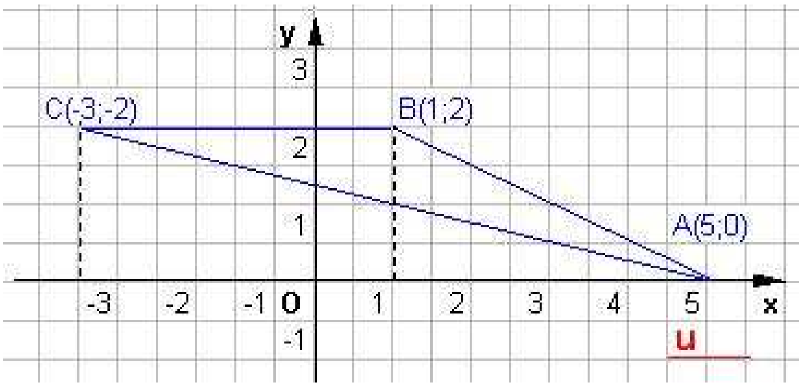
Si ha $-3 = k$.

Dunque l'equazione della retta è

$$2x + y + 3 = 0$$

Problema 25

Dati i tre vertici di un triangolo A(5,0); B(1,2) e C(–3,2), scriverne le equazioni dei lati.



Sfruttiamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Per i punti A(5,0); B(1,2) applicando la formula avremo :

$\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{x-5}{1-5}$ da cui $-4y = 2x - 10$ cioè $\mathbf{x + 2y - 5 = 0}$

Per i punti A(5,0); C(–3,2) applicando la formula avremo :

$\dfrac{y-0}{2-0}=\dfrac{x-5}{-3-5}$ da cui $-8y = 2x - 10$ cioè $\mathbf{x + 4y - 5 = 0}$

Per i punti B(1,2); C(–3,2) applicando la formula avremo :

$\dfrac{y-2}{2-2}=\dfrac{x-5}{-3-5}$ da cui $y - 2 = 0$ cioè $\mathbf{y = 2}$

N.B. : La retta è data dalla frazione con denominatore nullo, uguagliata a zero.

Problema 26

Scrivere l'equazione di una retta passante per A(4,2) e per il punto comune alle rette r) x + y = 3 e s) x – y + 1 = 0.

Per la determinazione del punto B, comune alle rette r) ed s), impostiamo il sistema di primo grado:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ \underline{x - y = -1} \\ 2x \;\; // = 2 \end{cases} \quad \text{lo risolviamo per add. e sott.}$$

da cui la soluzione x = 1 e da una delle due equazioni otteniamo il valore corrispondente della y (prendere sempre l'equazione più conveniente dal punto di vista algebrico), che in questo caso è immediato y = 2. Quindi B(1,2).
La retta per AB applicando sempre la formula della retta passante per due punti è:

$\frac{y-2}{2-2} = \frac{x-1}{4-1}$ da cui y – 2 = 0 cioè **y = 2**

Problema 27

Scrivere l'equazione della retta congiungente il punto d'intersezione delle rette a) x + y = 3; b) x – y + 1 = 0, con quello d'intersezione delle rette c) x – y = 1 e d) x = –1.

Punto A rette a) e b)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ \underline{x - y = -1} \\ 2x \; // = 2 \end{cases}$$ analogamente al problema precedente abbiamo il punto A(1,2)

Punto B rette c) e d)

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$ da cui y = - 2 e le coordinate sono B(–1; –2)

La retta AB cercata, applicando sempre la formula della retta passante per due punti è:

$\frac{y-2}{-2-2} = \frac{x-1}{-1-1}$ da cui – 2 (y – 2) = – 4 (x – 1)

semplificando e con facili conti abbiamo

$$(y - 2) = 2 (x - 1)$$
$$y - 2 = 2x - 2$$
$$\mathbf{y = 2x}$$

Problema 28

Scrivere l'equazione della retta passante per A(–5,–1) parallela alla retta congiungente l'origine delle coordinate con B(1,2).

Retta congiungente O(0,0) con B(1,2), applicando sempre la formula della retta passante per due punti è:

$\frac{y-0}{0-2} = \frac{x-0}{1-0}$ da cui **y = – 2x** con **m = + 2**

in definitiva la retta parallela alla precedente e passante per A(–5, –1) la determineremo con la formula della retta passante per un punto:

$y - y_1 = m (x - x_1)$ quindi

$$y - 1 = 2 (x + 5)$$
$$y + 1 = 2x + 10$$
$$\mathbf{2x - y + 9 = 0}$$

Problema 29

La retta passante per A(2,3) e B(–1, –6) e quella per C(6, –1) e D(–3,2) come sono fra loro?

Sfruttiamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

evidenziandone l'espressione del coefficiente angolare m, cioè

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Per i punti A(2,3); B(-1,-6) applicando la formula avremo :

$\frac{y-3}{x-2}=\frac{-6-3}{-1-2}$ da cui $\frac{y-3}{x-2}=\frac{-9}{-3}$ cioè $\frac{y-3}{x-2}=+3$ **m = 3**

Per i punti C(6,-1); D(-3,2) applicando la formula avremo :

$\frac{y+1}{x-6}=\frac{2+1}{-3-6}$ da cui $\frac{y-1}{x-6}=\frac{3}{-9}$ cioè $\frac{y-3}{x-2}=-\frac{1}{3}$ **m' = – 1/3**

Se ne deduce che le due rette sono fra loro perpendicolari perché soddisfano la condizione di antireciprocità cioè m = –1/ m'

Problema 30

Scrivere l'equazione della retta passante per A(1,3) e parallela a quella passante per i punti B(–1,–6) e C(2,3).

Applicando la formula della retta passante per un punto abbiamo:

$y - y_1 = m (x - x_1)$ quindi

y – 3 = m (x – 1)

Determiniamo ora la retta per BC, sfruttando l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

evidenziandone l'espressione del coefficiente angolare m, cioè

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

dati i punti B(–1, –6) ; C(2,3) e applicando la formula avremo :

$\frac{y+6}{x+1}=\frac{3+6}{2+1}$ da cui $\frac{y+6}{x+1}=\frac{9}{3}=3=m'$

Concludendo essendo le due rette parallele m = m' da cui

$$y - 3 = 3 (x - 1)$$
$$y - 3 = 3x - 3$$
$$\mathbf{y = 3x}$$

Problema 31

Scrivere l'equazione della perpendicolare condotta per l'intersezione delle rette r) x + y = 3 e s) x – y = 1 ad una retta di coefficiente angolare 2.

Punto A rette r) e s)

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ \underline{x - y = 1} \\ 2x \;//\; = 4 \end{cases}$$

analogamente al problema precedente abbiamo il punto A(2,4) la retta perpendicolare avrà m = -1/m' quindi m = -1/2 da cui l'equazione cercata

$$y - 1 = -1/2\,(x - 2)$$
$$2y - 2 = -x + 2$$
$$\mathbf{x + 2y - 4 = 0}$$

Problema 32

Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per A(2,5) e B(–3,0); calcolare inoltre, l'intersezione di essa con la retta passante per C(7,2) e di coefficiente angolare –1.

Sfruttiamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

evidenziandone l'espressione del coefficiente angolare m, cioè

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Per i punti A(2,5); B(–3,0) applicando la formula avremo :

$\frac{y-5}{x-2} = \frac{-5}{-5}$ da cui $\frac{y-5}{x-2} = 1$ cioè **m = 1** e la retta **y – 5 = x – 2**

Applicando la formula della retta passante per il punto C(7,2) con il coefficiente dato abbiamo:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \text{ quindi}$$
$$y - 2 = -1\,(x - 7)$$
$$\mathbf{y - 2 = -x + 7}$$

Vediamone l'intersezione

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ \underline{x + y = 9} \\ 2x\ // = 6 \end{cases}$$

da cui x = 3 ed y = 6 e le coordinate dell'intersezione : Q(3,6)

Problema 33

Scrivere l'equazione della retta passante per A(6, –5) e di coefficiente angolare –5/3. Scrivere quindi l'equazione della parallela ad essa condotta per B(1,0) e della perpendicolare alla stessa per C(5,1).

Applicando la formula della retta passante per il punto A(6, –5) con il coefficiente dato abbiamo:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \text{ quindi}$$
$$y + 5 = -5/3\,(x - 6)$$
$$3y + 5x = 15$$

Applicando la formula della retta passante per il punto B(1,0) con il coefficiente m = m' perché parallela abbiamo:

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \text{ quindi}$$
$$y - 0 = -5/3\,(x - 1)$$
$$3y + 5x = 5$$

Applicando la formula della retta passante per il punto C(5,1) con il coefficiente m = –1/ m' perché perpendicolare abbiamo:

$$m = -\frac{1}{m'} = -\frac{1}{-\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \text{ quindi}$$
$$y - 1 = 3/5\,(x - 5)$$
$$3x - 5y = 10$$

Problema 34

Scrivere l'equazione della retta passante per l'intersezione delle rette r) y = x e s) 2x + y = 6 e parallela alla retta x – y + 4 = 0.

Calcoliamo il punto (A) d'intersezione tra le rette date :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ \underline{2x + y = 6} \\ 3x \quad // \ = 6 \end{cases}$$

da cui x = 2 ed y = 2 e le coordinate dell'intersezione : A(2,2)

Il coefficiente angolare della retta x – y + 4 = 0 è pari a m = – a/b = 1
Da cui applicando la formula della retta passante per il punto A(2,2) con il coefficiente m = 1 perché parallela abbiamo:

$$y - y_1 = m (x - x_1) \text{ quindi}$$
$$y - 2 = 1 (x - 2)$$
$$y = x$$

Problema 35

Trovare l'intersezione della retta passante per i punti A(–1,–2) e B(4,3) con la retta per C(–2,7) e perpendicolare alla retta r) 2x – 3y = 6.

Sfruttiamo l'equazione della retta passante per due punti AB:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Per i punti A(–1, –2); B(4,3) applicando la formula avremo :

$\frac{y+2}{3+2} = \frac{x+1}{4+1}$ da cui 5 (y + 2) = 5 (x + 1) quindi

$$y + 2 = x + 1$$
$$x - y = 1$$

Il coefficiente angolare della retta (r) è : m = –a/b = –2/–3 = 2/3
La perpendicolare avrà il coefficiente angolare antireciproco cioè : m = –1/m'= –3/2
Applicando la formula della retta passante per il punto C(–2,7) con il coefficiente m = – 3/2 abbiamo:

$$y - y_1 = m (x - x_1) \text{ quindi}$$
$$y - 7 = -3/2 (x + 2)$$
$$3x - 2y = 14 - 6$$
$$3x - 2y = 8$$

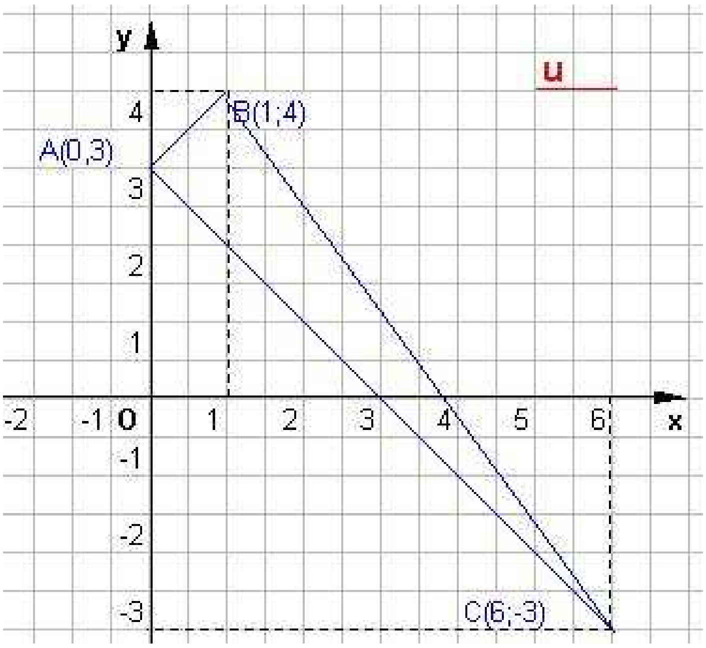
L'intersezione cercata sarà data da:

$$2\begin{cases} x - y = 1 \\ \underline{3x + 2y = 8} \\ 5x \quad // \ = 10 \end{cases}$$

da cui x = 2 ed y = 1 e le coordinate dell'intersezione : D(2,1)

Problema 36

I vertici di un triangolo sono A(0,3); B(1,4); C(6,–3). Scrivere le equazioni dei suoi lati e provare che esso è rettangolo.



Sfruttiamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

evidenziandone l'espressione del coefficiente angolare m, cioè

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

così da determinare subito quali rette sono eventualmente perpendicolari

retta AB

$\frac{y-3}{x-0}=\frac{4-3}{1-0}$ da cui $\frac{y-3}{x}=1$ equazione retta y – x = 3

retta AC

$\frac{y-3}{x-0}=\frac{-3-3}{6-0}$ da cui $\frac{y-3}{x}=-1$ equazione retta y + x = 3

retta BC

$\frac{y-4}{x-1}=\frac{-3-4}{6-1}$ da cui $\frac{y-4}{x-1}=-\frac{7}{5}$ equazione retta 5y – 20 = –7x +7 cioè 5y + 7x = 27

Le rette AB e AC sono perpendicolari perché i rispettivi coefficienti angolari sono antiriciproci, il triangolo è rettangolo in A, e quindi sussiste anche $AB^2 + AC^2 = CB^2$.

Problema 37

Determinare l'equazione della retta passante per i punti A(–1,m) e B(2m,1).

a) per quali valori di m tale retta è parallela all'asse delle x o a quello delle y?

b) Per quali valori di m è parallela alla prima o seconda bisettrice?

c) Per quali valori di m passa per C(0,15)?

Sfruttiamo l'equazione della retta passante per due punti:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-m}{1-m}=\frac{x+1}{2m+1} \text{ da cui}$$

$$(2m + 1)(y-m) = (1 – m)(x+1)$$

$$2my – 2m^2+y – m = x + 1 – xm – m$$

$$y(2m+1) - x(1-m) – 1 – 2m^2 = 0 \quad \textbf{(*)}$$

$$m = -\frac{a}{b}=\frac{1-m}{2m+1}$$

a) affinchè questa retta sia parallela all'asse delle ordinate si dovrà imporre che la sua ordinata sia nulla cioé y(2m+1) = 0 la condizione per soddisfare questo è 2m + 1 = 0 cioè m = – 1/2, da cui la retta:

$$- x\,(1+ 1/2) - 1 -2\,(1/4) = 0$$
$$-3x/2 -1 -1/2 = 0$$
$$x = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{3}{2}} = -1$$

affinchè questa retta sia parallela all'asse delle ascisse si dovrà imporre che la sua ascissa sia nulla cioé – x(1– m) = 0 la condizione per soddisfare questo è 1– m = 0 cioè m = 1, da cui la retta:

$$y(2+1) -1-2 = 0$$
$$3y = 3$$
$$y = 1$$

b) Sappiamo che la prima bisettrice ha equazione y = x con coeff. ang. m = 1
Sappiamo che la seconda bisettrice ha equazione y = – x con coeff. ang. m = – 1.
Nel nostro caso il coeff. ang è pari a –a/b ed è in funzione di m, ed andrà uguagliato rispettivamente ai valori di m sia della prima bisettrice che della seconda:

I^)
$$\frac{1-m}{2m+1} = 1 \text{ da cui}$$
$$1 - m = 2m + 1$$
$$3m = 0$$
$$m = 0$$

quindi l'equazione della retta parallela alla prima bisettrice è y – x = 1

II^)
$$\frac{1-m}{2m+1} = -1 \text{ da cui}$$
$$1 - m = -2m - 1$$
$$m +2 = 0$$
$$m = -2$$

quindi l'equazione della retta parallela alla seconda bisettrice è
$$y(- 4+1) - x\,(1+2) -1- 8 = 0$$
$$-3y - 3x -9 = 0$$
$$y + x + 3 = 0$$

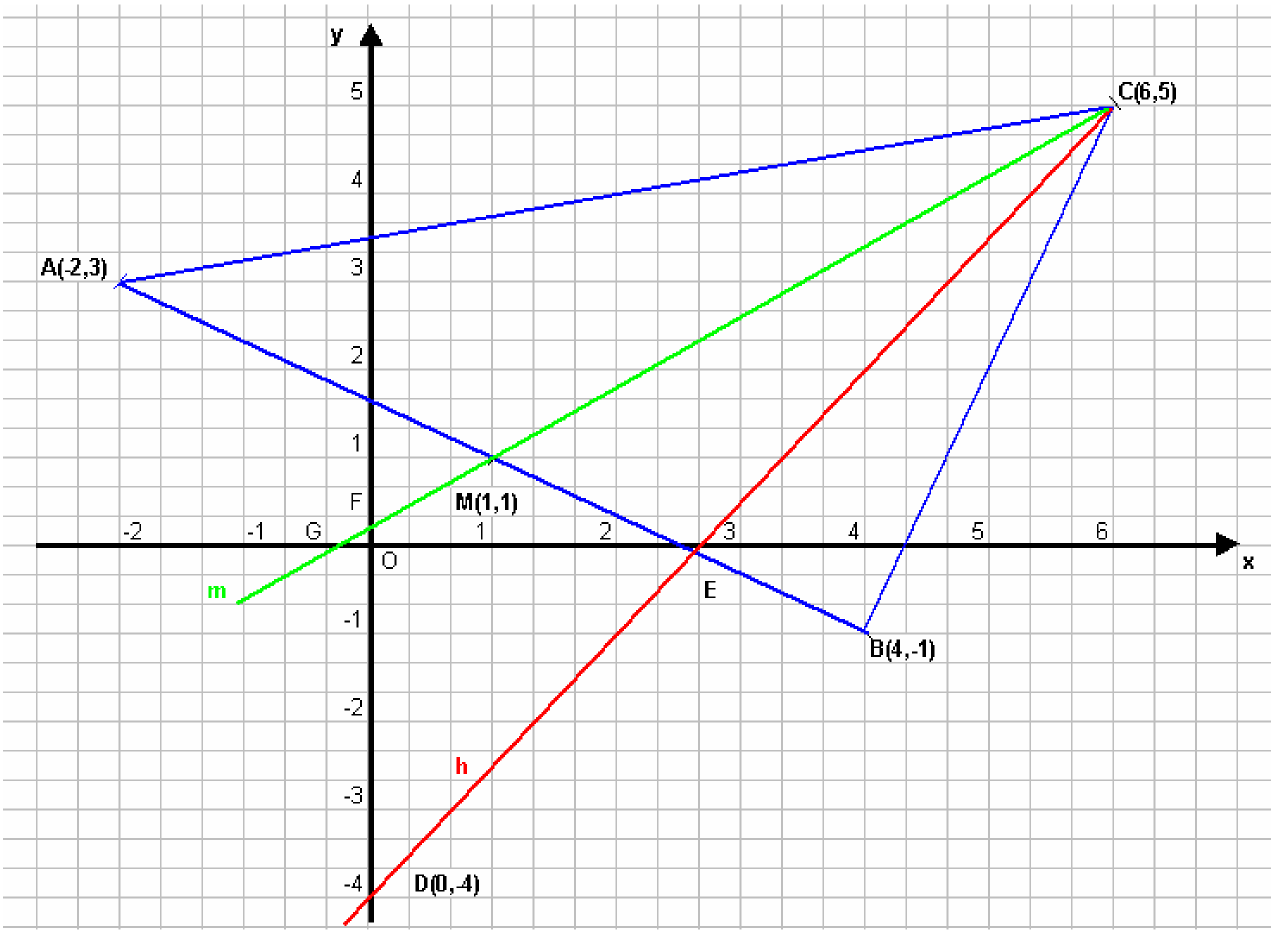
c)Determiniamo infine per quali valori d m la retta passa per il punto di coordinate stabilite, per farlo basterà imporre il passaggio della retta per quelle coordinate, da cui:

$$15(2m+1)-1-2m^2 = 0$$
$$30m + 15 - 1 - 2m^2 = 0$$
$$m^2 -15m - 7 = 0 \quad \text{da cui}$$
$$m = \frac{15 \pm \sqrt{225+28}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{253}}{2}$$

Problema 38

Il vertice A di un triangolo ABC ha coordinate (–2,3); si sa che l'altezza uscente dal vertice C ha equazione 3x – 2y – 8 = 0 e che l'equazione della mediana uscente dallo stesso vertice C è 4x – 5y + 1 = 0 .

Calcolare le coordinate degli altri vertici del triangolo e la sua area.



Rappresentiamo le rette

f) 3x – 2y – 8 = 0

h

	x	y
D	0	–4
E	8/3	0

m) 4x – 5y + 1 = 0

m

	x	y
F	0	1/5
G	–1/4	0

L’intersezione cercata sarà data da:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 8 = 0 \\ 4x - 5y + 1 = 0 \end{cases}$$ lo risolviamo mediante il metodo del confronto

$$\begin{cases} x = \dfrac{2y+8}{3} \\ x = \dfrac{5y-1}{4} \end{cases}$$ quindi 4(2y + 8) = 3(5y –1)

da cui 8y +32 = 15y –3

7y = 35

y = 5

e dalla I^ equaz del sistema abbiamo $x = \frac{10+8}{3} = 6$

In definitiva il punto cha coordinate C(6,5)

Cerchiamo ora la **retta AB**, avente come caratteristica:
- retta per un punto e perpendicolare ad h

il coeff. angolare di h è m = -a/b = -3/-2 = 3/2 e l'antireciproco è m' = -1/m = -2/3 quindi

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ cioè}$$
$$y - 3 = -2(x+2)/3$$
$$3y - 9 = -2x - 4$$
$$\mathbf{3y + 2x = 5}$$

Cerchiamo il **punto M** di intersezione tra la retta AB e la mediana (m), facendo sistema tra le due equazioni:

$$-2\begin{cases} 2x + 3y - 5 = 0 \\ \underline{4x - 5y + 1 = 0} \end{cases} \quad \text{lo risolviamo mediante il metodo add./sott.}$$

// -11y +11 = 0

y = 1 e dalla I^ equaz. del sistema 2x +3 – 5 = 0 x = 1 cioè **M(1,1).**

Determiniamo ora il punto $B(x_B,y_B)$, quest'ultimo ed il punto M (1,1) appartengono alla retta passante per questi due punti di equaz. generica

$$\frac{y-1}{y_B-1} = \frac{x-1}{x_B-1} \text{ cioè}$$
$$yx_B - y - x_B + 1 = xy_B - x - y_B + 1$$
$$y(x_B - 1) - x(y_B - 1) = x_B - y_B$$

e questa deve coincidere con la retta AB nota , in definitiva uguagiando i coefficienti si ha :

$x_B - 1 = 3$ si ha $x_B = 4$

$-(y_B - 1) = 2$ si ha $y_B = -1$ **B(4, – 1)**

Verifica $x_B - y_B = 4 - (-1) = 5$ C.V.D.

Per determinare l'area procederemo in due modi:

I°) applicazione classica della formula As = Bh/2

Le misure delle distanze le faremo mediante la

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ che nel nostro caso sarà}$$

$$h = CE = \sqrt{\left(6 - \frac{8}{3}\right)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{18-8}{3}\right)^2 + 25} = \sqrt{\frac{100}{9} + 25} = \sqrt{\frac{325}{9}} = \frac{5}{3}\sqrt{13}$$

$$d(AB) = \sqrt{(-2-4)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$As = \frac{Bh}{2} = \frac{2\sqrt{13}\,\frac{5}{3}\sqrt{13}}{2} = \sqrt{13}\,\frac{5}{3}\sqrt{13} = \frac{5x13}{3} \approx 22$$

II°) applicazione della formula matriciale di Sarrus:

Inserite le tre coordinate dei vertici del triangolo per righe, inserire una colonna di termini unitari, ripetendo quindi le tre coordinate dei punti, e procedere come nello schema sottostante:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix}\right| =\frac{1}{2}\left[(x_1y_2 1+y_1 1 x_3+1 x_2 y_3)-(1 y_2 x_3+x_1 1 y_3+y_1 x_2 1)\right]$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Da cui nel nostro caso:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 4 & -1 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \end{matrix}\right| =\frac{1}{2}\left[2+18+20-(-6-10+12)\right]=\frac{1}{2}(40+4)=\frac{44}{2}=22$$

La retta CB non richiesta è comunque pari a (retta per due punti)

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-5}{-1-5}=\frac{x-6}{4-6}$$

$$-2y+10 = -6x + 36$$

$$3x - y = 13$$

Problema 39

Date le rette r) 2x – y + 1 = 0 ed s) x + 3y – 5 = 0

a) **determinare il fascio,**
b) **fra le infinite rette del fascio determinare quella che passa per l'origine,**
c) **selezionare fra tutte le rette del fascio quella che passa per il punto A(3,2)**
d) **fra le infinite rette determinare quella che è parallela alla q) 5x – 3y + 1 = 0**
e) **fra le infinite rette determinare la perpendicolare alla retta v) 3x – y + 7 = 0**
f) **Determinare il centro del fascio**

a) determinare il fascio

$$2x - y + 1 + t\,(x + 3y - 5) = 0$$

$$2x - y + 1 + tx + 3ty - 5t = 0$$

$$\mathbf{x\,(2 + t) + y\,(3t - 1) - 5t + 1 = 0 \quad (*)}$$

b) fra le infinite rette del fascio determinare quella che passa per l'origine (cond : c= 0)

quindi 1 – 5t = 0 da cui t = 1/5

c) selezionare fra tutte le rette del fascio quella che passa per il punto A(3,2)

basterà sostituire il punto dato nel fascio, ottenendo

$$3\,(2 + t) - 2\,(3t - 1) - 5t + 1 = 0$$

$$6 + 3t - 6t + 2 - 5t + 1 = 0$$

$$-8t + 9 = 0$$

$$\mathbf{t = 9/8}$$

d) fra le infinite rette determinare quella che è parallela alla q) 5x – 3y + 1 = 0

La condizione è che la retta del fascio deve avere lo stesso coefficiente angolare m = m', quindi

$m_q = -a/b = 5/3$ $\quad$ $m_f = m_q$ con $m_f = -\frac{2+t}{3t-1}$ da cui l'equazione

$-\frac{2+t}{3t-1}=\frac{5}{3}$ $\quad$ con la condizione $t \neq \frac{1}{3}$ (se non si pone tale condizione si potrebbe selezionare la retta con coeff. ang. 90° ; infinito!)

$$-3\,(2 + t) = 5\,(3t - 1)$$

$$-6 - 3t = 15t - 5$$

$$-18t = 1$$
$$\mathbf{t = -1/18}$$

e) fra le infinite rette determinare la perpendicolare alla retta v) $3x - y + 7 = 0$
Condizione : $m_f \; m_r = -1$ dove $m_r = 3$

$$-\frac{3(2+t)}{3t-1} = -1$$
$$\frac{6+3t}{3t-1} = 1$$
$$6 + 3t = 3t - 1$$
$$\mathbf{6 = -1!!}$$

Ottenendo un assurdo se ne deduce che la retta cercata è quella esclusa.

N.B. : $m_s = -\frac{1}{3}$ opposto e reciproco di $m_v = 3$ infatti $m_s \, m_v = -1$

Conclusione, la retta s è quella cercata (è moltiplicata per il parametro)

f) Determinare il centro del fascio
Dalla (*) mettiamo a sistema le due equazioni delle rette, risolveremo il sistema con il metodo della add/ sott algebrica applicato due volte con la moltiplicazione di due fattori opportuni così da eliminare una delle due incognite, l'equazione che si ottiene, combinazione lineare delle precedenti due, ammetterà sempre la stessa soluzione:

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x + 3y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$3\begin{cases} 6x - 3y + 3 = 0 \\ \underline{x + 3y - 5 = 0} \end{cases}$$
$$7x \quad // \quad -2 = 0 \qquad\qquad \text{da cui } x = \frac{2}{7}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ \underline{-2x - 6y + 10 = 0} \end{cases} \; -2$$
$$// \; -5y + 11 = 0 \qquad\qquad \text{da cui } y = \frac{11}{5}$$

Problema 40
Dato il fascio (2k – 1)x + (k + 3)y – k + 1 = 0
Determinare :

a) **centro del fascio**
b) **la parallela all'asse y**
c) **la parallela alla retta t) x – 3y + 13 = 0**
d) **la retta del fascio che dista una unità da A(1,0)**
e) **le rette che intersecano OA**

a) centro del fascio

Analogamente al caso (f) dell'esercizio precedente abbiamo:

$$(2k - 1)x + (k + 3)y - k + 1 = 0$$
$$2kx - x + ky + 3y - k + 1 = 0$$
$$3y - x + 1 + k(2x + y - 1) = 0$$

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 2 \quad \underline{-x + 3y + 1 = 0} \end{cases}$$

$// \quad + 7y + 1 = 0$ da cui $y = -\frac{1}{7}$ per sost. Con facili passaggi si ha $x = \frac{4}{7}$

b) la parallela all'asse y (condizione : b = 0) quindi

$$k + 3 = 0$$
$$k = -3$$

sostituendo nel testo abbiamo l'equazione cercata

$$(-6 - 1)x + (-3 + 3)y + 3 + 1 = 0$$
$$-7x + 4 = 0$$
$$\mathbf{x = \frac{4}{7}}$$

c) la parallela alla retta t) $x - 3y + 13 = 0$

$m_t = 1/3$ $\quad m_f = -\frac{2k-1}{k+3}$ dovendo essere $m_f = m_t$ avremo

$$-\frac{2k-1}{k+3} = \frac{1}{3} \quad \text{con } k \neq -3$$
$$3(2k - 1) = k + 3$$
$$-6k + 3 = k + 3$$
$$-7k = 0 \quad \text{da cui} \quad \mathbf{k = 0}$$

quindi la retta // è

$$\mathbf{x - 3y - 1 = 0}$$

d) la retta del fascio che dista una unità da A(1,0)
Applichiamo direttamente la formula della distanza di un punto da una retta

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \right|$$

$$d = \left| \frac{(2k-1)1 + (k+3)0 - k + 1}{\sqrt{(2k-1)^2 + (k+3)^2}} \right| = 1$$

$$\left| \frac{2k - 1 - k + 1}{\sqrt{4k^2 - 4k + 1 + k^2 + 6k + 9}} \right| = 1$$

$$\left| \frac{k}{\sqrt{5k^2 + 2k + 10}} \right| = 1$$

$$k^2 = 5k^2 + 2k + 10$$

$$-k^2 - 2k - 10 = 0$$

$$k^2 + 2k + 10 = 0 \quad \text{con} \quad \Delta = b^2 - 4\,ac < 0$$

Conclusione non esiste una retta che soddisfi la condizione richiesta.

e) le rette che intersecano OA con A(1, 0) quindi dall'equazione del fascio

$$(2k - 1)1 + (k + 3)0 - k + 1 = 0 \quad \text{cioè}$$

$$2k - 2 + 0 - k + 1 = 0$$

$$k = 0 \quad \text{condizione per A}$$

condizione per O(0,0) è c = 0 quindi

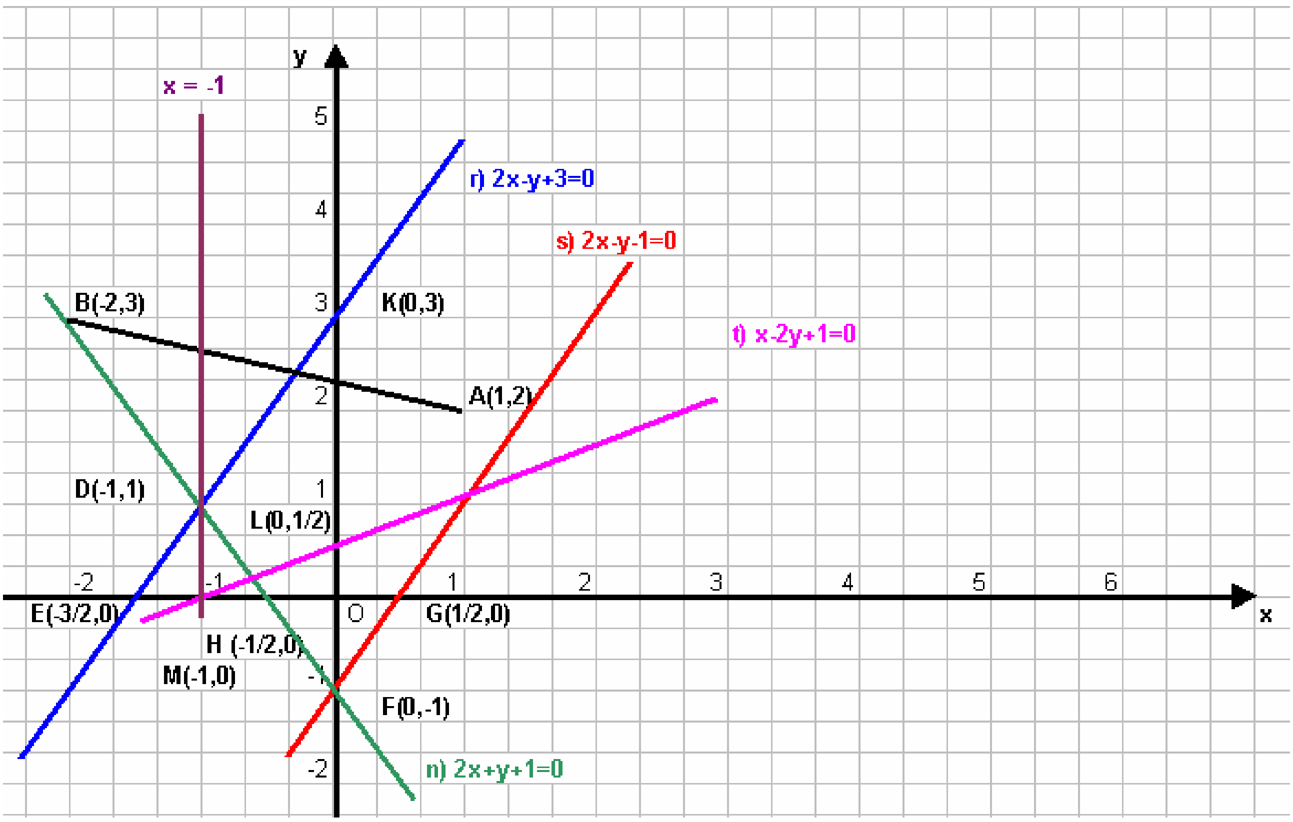
$$-k + 1 = 0$$
$$k = 1$$

risultato $\mathbf{0 \le k \le 1}$

Problema 41

Determinare k in modo che la retta (k – 1)x + y + k – 2 = 0
Risulti:

a) **parallela all'asse y**
b) **parallela alla retta di equazione y = 2x – 1**
c) **perpendicolare alla retta di equazione x – 2y + 1 = 0**
d) **attraversi il segmento AB dove A(1,2) e B(–2,3)**
e) **passi per il punto C(–1,3).**



a) esprimiamo il fascio evidenziando il parametro per poi determinare il centro del fascio:

$$kx - x + y + k - 2 = 0$$
$$k(x+1) - x + y - 2 = 0$$
$$k(x+1) + (-x + y - 2) = 0$$

$\begin{cases} x + 1 = 0 \\ -x + y - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ 1 + y - 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$ centro del fascio D (–1, 1)

Risulta evidente che l'unica retta parallela all'asse y appartenente al fascio è la retta limite $x + 1 = 0$ cioè $\mathbf{x = -1}$

b) Data la retta (s) $2x - y - 1 = 0$ rappresentiamola

s

	x	y
F	0	–1
G	1/2	0

con $m = -a/b = -(2/-1) = 2$

e nel nostro caso $m = -\frac{k-1}{1}$ quindi $-(k-1) = 2$ cioè

$$k - 1 = -2$$
$$\mathbf{k = -1}$$

sostituendo nell'equazione data si ha

$$(k-1)x + y + k - 2 = 0$$
$$(-1-1)x + y - 1 - 2 = 0$$
$$-2x + y - 3 = 0$$
$$\mathbf{2x - y + 3 = 0}$$

rappresentiamola

r

	x	y
K	0	3
E	–3/2	0

c) Data la retta $x - 2y + 1 = 0$ rappresentiamola

t

	x	y
L	0	1/2
M	–1	0

con $m = -a/b = -(-1/2) = 1/2$

L'equazione perpendicolare ha coefficiente angolare $m = -1/m' = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

Nel nostro caso e nel nostro caso $m = -\frac{k-1}{1}$ quindi $-(k-1) = -2$ cioè

$$k - 1 = 2$$
$$k = 3$$

sostituendo nell'equazione data si ha

$$(k-1)x + y + k - 2 = 0$$
$$(3-1)x + y + 3 - 2 = 0$$
$$\mathbf{2x + y + 1 = 0}$$

rappresentiamola

n

	x	y
F	0	–1
H	–1/2	0

d) il fascio il cui centro D (– 1, 1) dave attraversare il segmento : A(1,2); B(–2,3), quindi il parametro k avrà un intervallo e non un unico valore , per determinarlo sostituiamo sia il punta A che il B all'interno del fascio, ottenendo rispettivamente:

$$(k-1)x + y + k - 2 = 0$$

per A
$$(k-1)\,1+2 + k - 2 = 0$$
$$2k - 1 = 0$$
$$\mathbf{k = 1/2}$$

per B
$$-2(k-1) + 3 + k - 2 = 0$$
$$-2k + 2 + 3 + k - 2 = 0$$
$$\mathbf{k = 3}$$

estremo coincidente con la perpendicolare.

Conseguentemente $\frac{1}{2} \le k \le 3$

e) Sostituendo il punto C(–1,3) otteniamo un assurdo

$$(k-1)x + y + k - 2 = 0$$
$$-(k-1) + 3 + k - 2 = 0$$
$$\mathbf{-k + 1 + 3 - k - 2 = 0 \quad !!!!}$$

Se esaminiamo quanto espresso nel punto a)si nota che il punto C ha la stessa ascissa del centro D, quindi nessun valore di K soddisfa la condizione che coincide con la retta limite.

Problema 42

In un triangolo ABC, il vertice C ha coordinate C(1,1). L'altezza e la mediana relative al lato BC hanno rispettivamente equazioni 4x – 3y – 6 = 0 e x – 3 = 0.
Determinare area e perimetro del triangolo.

h

	x	y
Q	0	–2
R	3/2	0

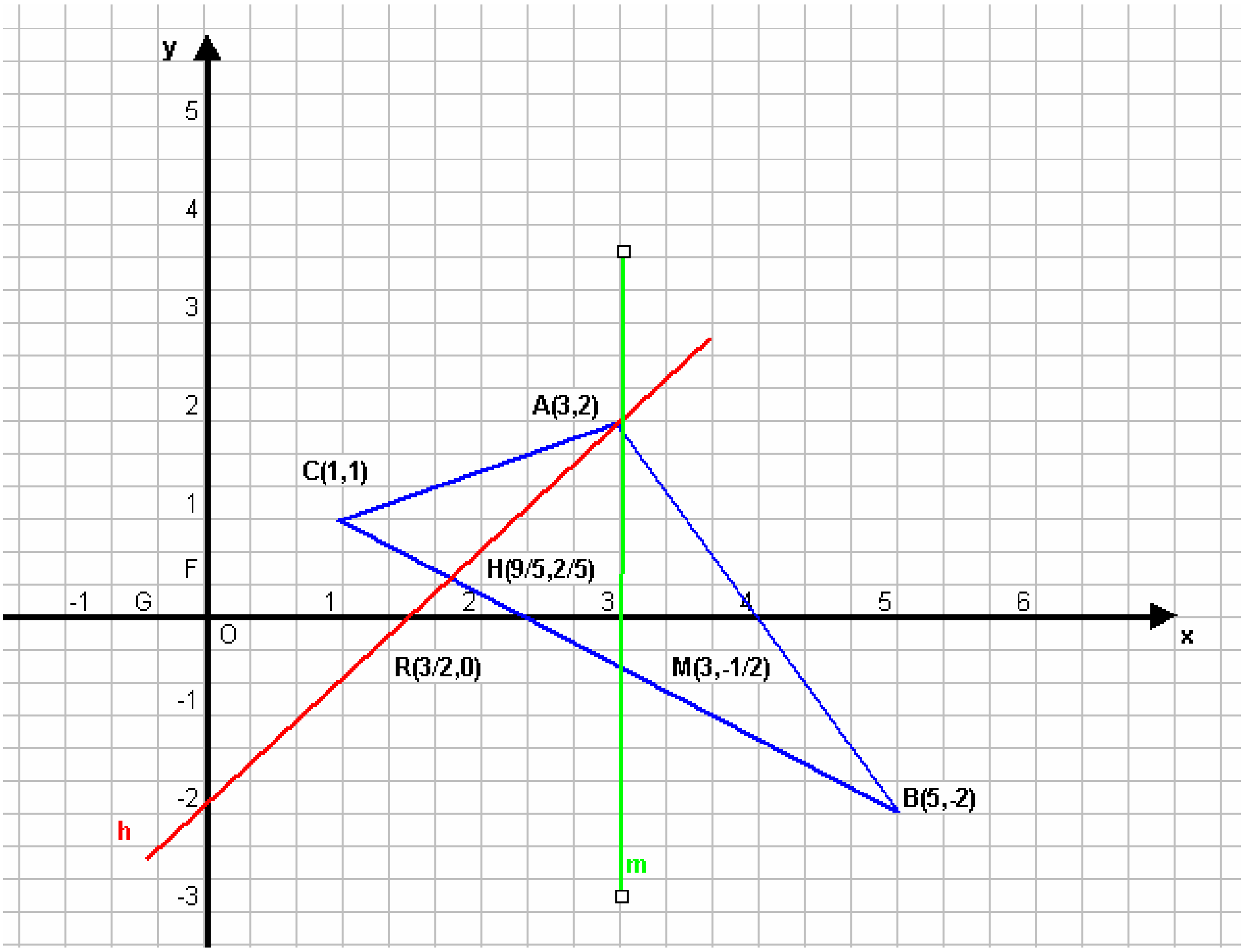
m

	x	y
M'	3	0
H	–1/2	0

Calcoliamo il punto d'intersezione tra h) ed m), secondo vertice del triangolo punto A

$$\begin{cases} x = 3 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ 12 - 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ -3y = 6 - 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = -6 / -3 = 2 \end{cases}$$

punto A (3, 2)



Per la ricerca del terzo vertice B ci si avvale della considerazione che: conoscendo il punto $M(x_m,y_m)$, intersezione della retta BC (base del triangolo) con la mediana m, è posto all'estremo opposto di C ed equidistante da M.

Per definizione abbiamo : $x_m = \dfrac{x_C + x_B}{2}$ e $y_m = \dfrac{y_C + y_B}{2}$

Iniziamo a determinare la retta BC essa passa per il punto C (1,1) ed è perpendicolare ad h essendo il coeff. ang. di quest'ultima pari a

$$m_h = - a/b = -4/-3 = 4/3$$

avremo
$$m' = -\frac{1}{m_h} = -\frac{3}{4}$$

e applicando la regola della retta passante per un punto abbiamo

$$y - y_C = m' (x - x_C)$$
$$y - 1 = -3/4 (x - 1)$$
$$4y - 4 = -3x + 3$$
$$\mathbf{3x + 4y = 7}$$

le coordinate del punto $M(x_m,y_m)$, saranno date dal sistema tra la retta della base BC e la retta mediana m

$$\begin{cases} x = 3 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ 4y = 7 - 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3 \\ 4y = -1/2 \end{cases}$$

punto M (3, –1/2)

Concludendo dall'espressioni delle coordinate di M sostituendo i valori trovati abbiamo :

$$\frac{x_C + x_B}{2} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{y_C + y_B}{2} = -\frac{1}{2}$$

$x_B = 6 – 1 = 5$ e $y_B = -2$ da cui il **punto B(5, –2)**

Ricerchiamo ora il valore dell'area, in due modi

I° modo) con l'applicazione della formula classica $A_S = Bh/2$

Dove B ed h sono le misure delle distanze tra B e C per la base ed A e H intersezione della retta base con la retta dell'altezza:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x - 3y = 6 \end{cases} \quad 4/3$$

$$\frac{16}{3}x + 3x \quad // \quad = 7 + \frac{24}{3}$$

$$\frac{16x + 9x}{3} = \frac{21 + 24}{3}$$

$$25x = 45$$

$$\mathbf{x = 9/5}$$

sostituendo nella 1^ equaz. abbiamo il valore della y

$$-3y = 6 - 4\,\frac{9}{5}$$

$$-3y = 6 - \frac{36}{5}$$

$$-15y = 30 - 36$$

$$-15\,y = -6$$

$$\mathbf{y = 2/5}$$

da cui il **punto H**$\left(\frac{9}{5}, \frac{2}{5}\right)$

$$d_{AH} = \sqrt{(x_A - x_H)^2 + (y_A - y_H)^2} = \sqrt{\left(3 - \frac{9}{5}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{15-9}{5}\right)^2 + \left(\frac{10-2}{5}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36+64}{25}} = \sqrt{\frac{100}{25}} = \sqrt{4} = 2$$

$$d_{BC} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

concludendo

$$\mathbf{A_S} = \frac{Bh}{2} = \frac{5 \bullet 2}{2} = 5$$

II° modo) con la formula di Sarrus

I punti sono A(3,2) ; B(5,-2) ; C(1,1)

$$A = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left[(x_1 y_2 1 + y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3) - (1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1)\right]$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

Da cui nel nostro caso:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left[-2+3+10-\left(-6+2+5\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(13-2\right)-1\right] = \frac{1}{2}\left(11-1\right) = \frac{10}{2} = 5$$

Per il calcolo del perimetro mancando le misure delle due distanze AC e AB applicheremo due volte la formula della distanza e poi sommeremo il tutto

$d_{BC} = 5$ già determinata

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

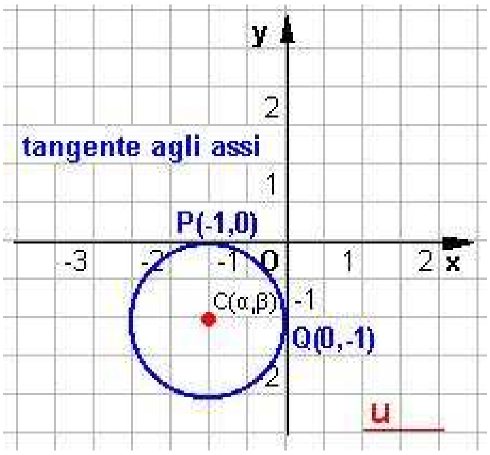
Concludendo il **perimetro** sarà:

2p = $d_{BC} + d_{AC} + d_{AB} = 5 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 5 + 3\sqrt{5}$

LA CIRCONFERENZA E LE SUE APPLICAZIONI

Problema 1

Determinare l'equazione della circonferenza passante per P(–1;0) e Q(0; –1).



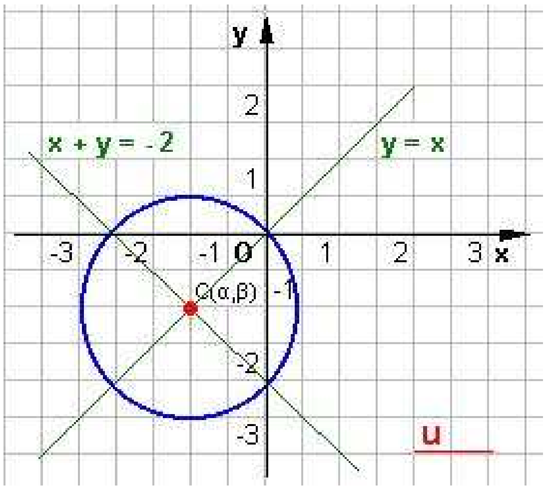
Osservando la figura, si nota che la circonferenza è tangente agli assi cartesiani in A e in B. Dunque il centro della circonferenza si ottiene dalla intersezione delle rette perpendicolari agli assi passanti per A e per B e quindi il centro risulta C (–1 ; –1).
Il raggio della circonferenza è r = 1.

Dunque l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0 .$$

Problema 2

Determinare l'equazione della circonferenza avente centro nel punto di intersezione delle rette $y = x$ e $x + y + 2 = 0$ e passante per l'origine degli assi .



Risolvendo il sistema formato dalle due rette date, si trova il centro C(–1;–1). Il raggio della circonferenza è dato dal segmento CO . Applicando la formula della distanza tra due punti si ottiene

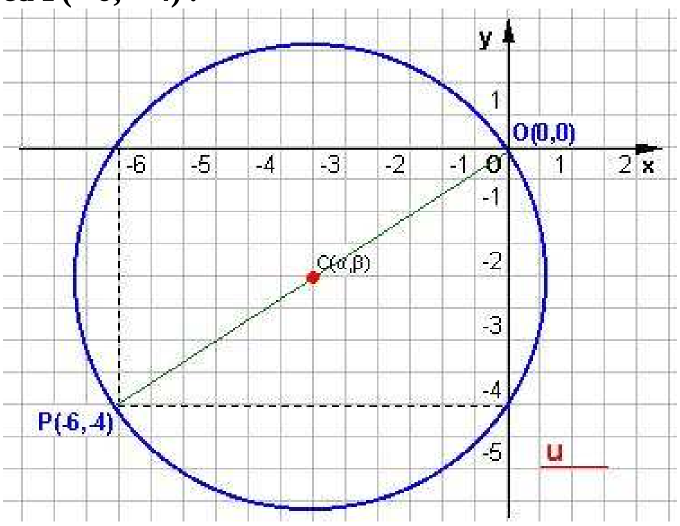
$$CO = \mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} ,$$

Dunque l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0 .$$

Problema 3

Determinare l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento OA con O(0;0) ed P(– 6; – 4) .



Applicando la formula del punto medio di un segmento , si trovano le coordinate del centro C (–3 ; –2). Il raggio della circonferenza è dato dal segmento CO . Applicando la formula della distanza tra due punti si ottiene

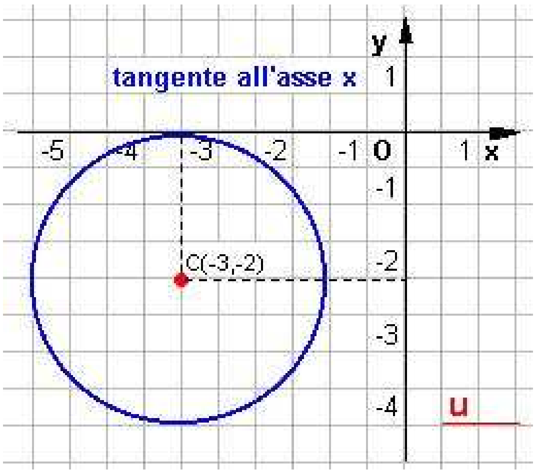
$$CO = \mathbf{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \mathbf{2},$$

Dunque l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y = 0$$

Problema 4

Determinare l'equazione della circonferenza avente centro nel punto C (–3 ; –2) e tangente all'asse x.



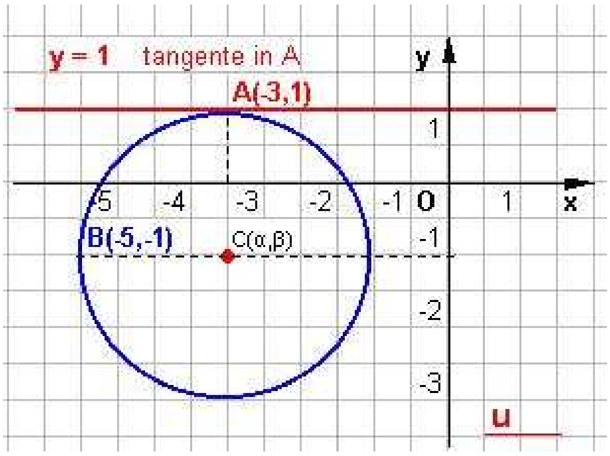
Essendo la circonferenza tangente all'asse delle x, il raggio è r = 2 .

Dunque l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 + 6x + 4y + 11 = 0 .$$

Problema 5

Determinare l'equazione della circonferenza tangente alla retta di equazione y = 1 nel suo punto A(–3;1) e passante per B.



Osservando la figura il centro della circonferenza è

$$C(-3; -1).$$

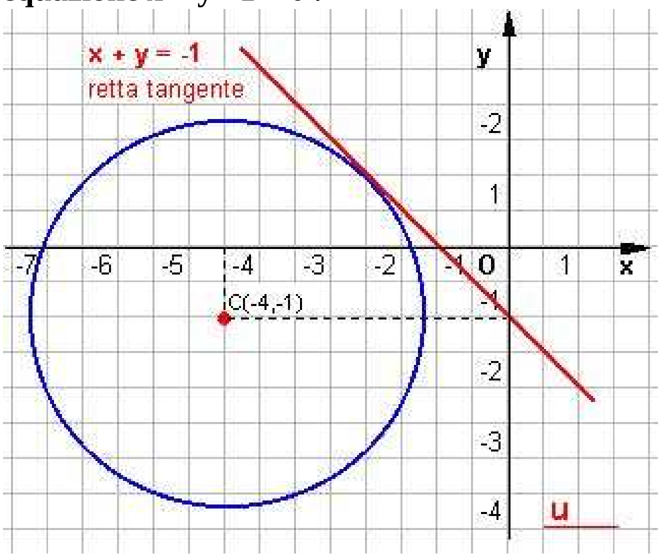
Il raggio della circonferenza è uguale alla distanza CA = 2 .

Dunque l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0 .$$

Problema 6

Determinare l'equazione della circonferenza di centro (–4;–1) e tangente alla retta di equazione x + y +1 = 0 .



Per determinare l'equazione della circonferenza, basta trovare la misura del raggio che è la distanza del centro della circonferenza dalla retta data . Si ottiene

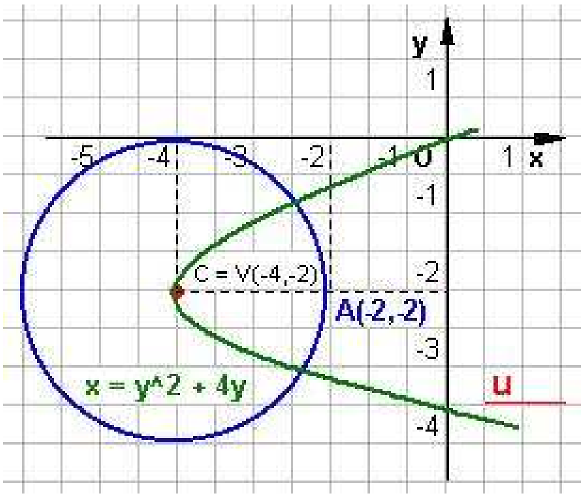
$$r = 2\sqrt{2}.$$

Applicando la formula della circonferenza noto il centro e il raggio si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 + 8x + 2y + 9 = 0$$

Problema 7

Determinare l'equazione della circonferenza passante per il punto A(–2;–2) e avente il centro nel vertice della parabola $x = y^2 + 4y$.



Trovato il vertice della parabola V(– 4;–2) , basta calcolare la misura del raggio che è la distanza

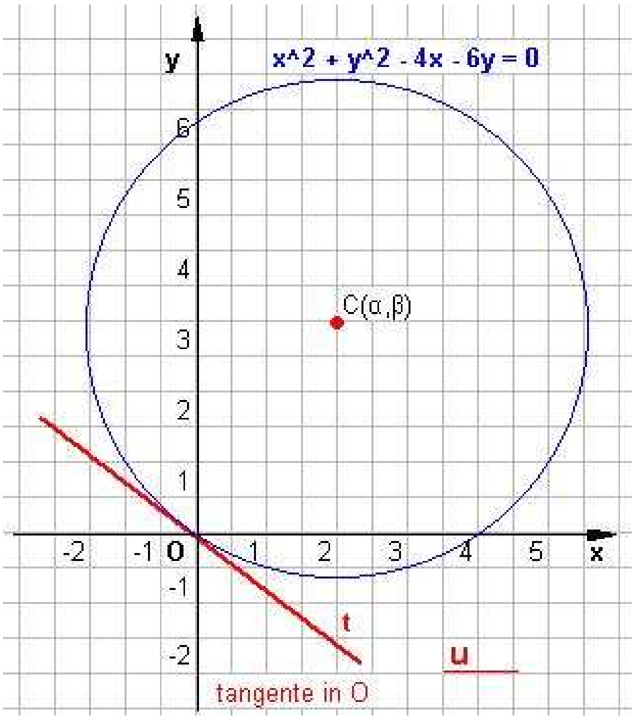
$$VA = 2.$$

Applicando la formula della circonferenza noto il centro e il raggio si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 + 8x + 4y +16 = 0 .$$

Problema 8

Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 – 4x – 6y = 0$ determinare l'equazione della retta t tangente alla curva nel punto O (0 ; 0)



Si scrive l'equazione y = mx del fascio proprio di rette di centro O. Si ricava il centro C della circonferenza ; si ha

C (2 ;3).

Si trova il coefficiente angolare della retta CO; si ottiene

m = 3/2.

Poichè la retta CO è perpendicolare alla tangente, in quanto il raggio della circonferenza appartiene alla retta CO, imponendo la condizione di perpendicolarità tra rette, si ha

m = –2/3.

Sostituendo tale valore al posto di m nell'equazione del fascio si ottiene

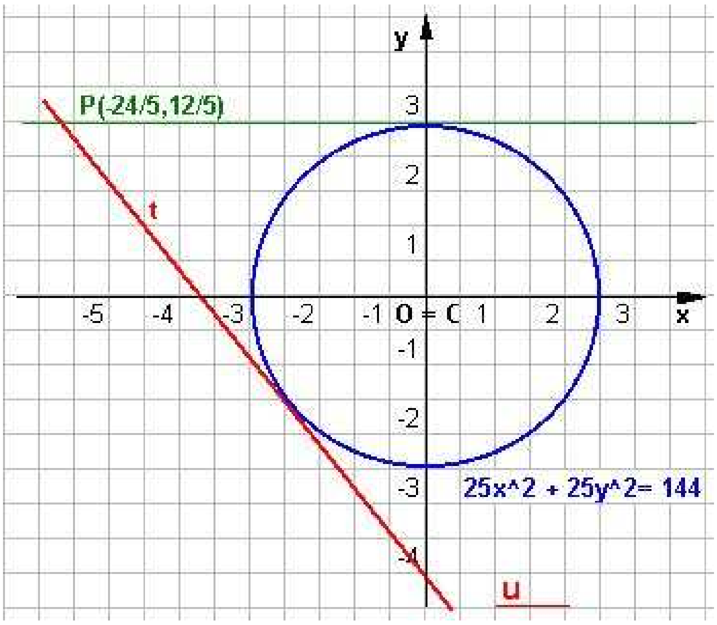
y = (–2/3)x.

Dunque l'equazione della retta è 2x + 3y = 0.

Problema 9

Data la circonferenza di equazione $25x^2 + 25y^2 = 144$ determinare l'equazione della retta t tangente alla curva condotta dal punto P(–24/5 ; 12/5) e non parallela all'asse delle x.

Si scrive l'equazione del fascio proprio di rette di centro P, cioè



$$y-\frac{12}{5}=m(x+\frac{24}{5}).$$

Si ricava il centro C e il raggio della circonferenza $25x^2+25y^2 = 144$: si ha

C(0;0) ed r = 2/5.

Si impone che la distanza del centro della circonferenza dal fascio proprio sia uguale al raggio. Si ottiene $\frac{|24m+12|}{\sqrt{25m^2+25}}=\frac{12}{5}$.

Risolvendo l'equazione si ottiene

$3m^2 + 4m = 0$ da cui m = 0 ed m = – 4/3.

Poichè la retta non deve essere parallela all'asse delle x, il valore accettabile è

m= – 4/3.

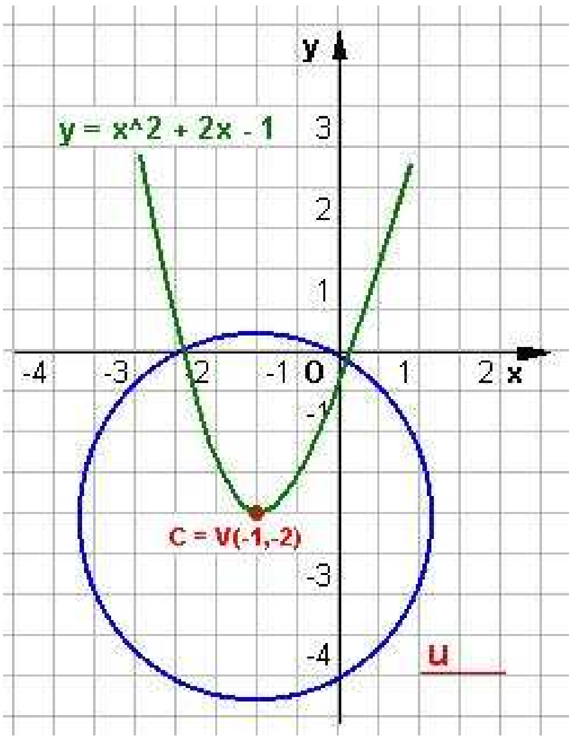
Sostituendo tale valore al posto di m nell'equazione del fascio si ottiene

$$y-\frac{12}{5}=-\frac{4}{3}(x+\frac{24}{5}).$$

Dunque l'equazione della retta è $4x + 3y +12 = 0$.

Problema 10

Determinare l'equazione della circonferenza passante per O(0;0) ed avente il centro nel vertice della parabola $y = x^2 + 2x -1$.



Trovato il vertice della parabola

V(–1;–2),

basta calcolare la misura del raggio che è la distanza

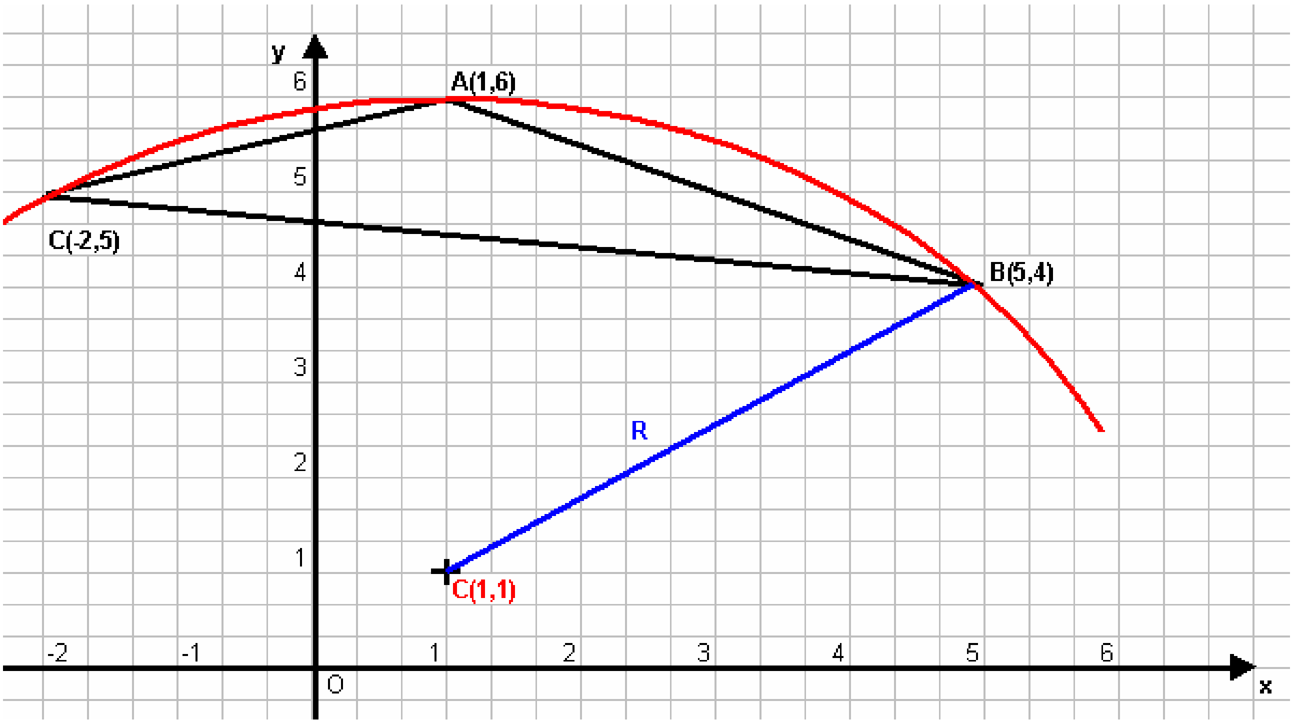
CO = √5.

Applicando la formula della circonferenza noto il centro e il raggio si ottiene l'equazione

$$x^2 + y^2 +2x + 4y = 0$$

Problema 11

Trovare la misura del raggio della circonferenza circoscritta al triangolo di vertici (1,6), (5,4) e (– 2,5). Quali sono le coordinate del centro di tale circonferenza?



L'equazione generica della circonferenza ha espressione

$x^2 + y^2 + m x + ny + p = 0$

essendo circoscritta al triangolo dato, i vertici di quest'ultimo appartengono alla circonferenza soddisfacendone l'equazione, per questo ne imponamo il passaggio per i tre punti dati

$$\begin{cases} 1 + 36 + m + 6n + p = 0 & (A) \\ 25 + 16 + 5m + 4n + p = 0 & (B) \\ 4 + 25 - 2m + 5n + p = 0 & (C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bullet\ 37 + m + 6n + p = 0 \\ 41 + 5m + 4n + p = 0 \\ \bullet\ 29 - 2m + 5n + p = 0 \end{cases}$$

tra la prima e la terza $-1 \left| \begin{array}{l} -37 - m - 6n - p = 0 \\ 29 - 2m + 5n + p = 0 \\ \hline -8 - 3m - n \quad // \; = 0 \end{array} \right.$

$$\begin{cases} n = -8 - 3m \\ \bullet\ 41 + 5m + 4n + p = 0 \\ \bullet\ 29 - 2m + 5n + p = 0 \end{cases}$$

tra seconda e la terza $-1 \left| \begin{array}{l} -41 - 5m - 4n - p = 0 \\ 29 - 2m + 5n + p = 0 \\ \hline -12 - 7m + n = 0 \end{array} \right.$

$$\begin{cases} n = -8-3m \\ n = 7m+12 \\ 29-2m+5n+p=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = -8-3m \\ -8-3m = 7m+12 \\ 29-2m+5n+p=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n = -8-3m \\ -10m = 20 \\ 29-2m+5n+p=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -2 \\ n = -8+6=-2 \\ 29+4-10+p=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = -2 \\ n = -2 \\ p = -23 \end{cases}$$

concludendo l'equazione della circonferenza è

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$$

$C(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2})$ da cui $C(\frac{2}{2}, \frac{2}{2})$ cioè **C (1,1)**

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2-4p} = \frac{1}{2}\sqrt{4+4-4(-23)} = \frac{1}{2}\sqrt{8+92} = \frac{1}{2}\sqrt{100} = \frac{10}{2} = 5$$

Problema 12

Trovare la distanza d del centro C della circonferenza $x^2 + y^2 + ay = 0$ dalla retta $y = 2(a - x)$.

Mettiamo a sistema le due curve per evidenziare la posizione della retta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ay = 0 \\ y = 2(a-x) \end{cases}$$

Dopo la sostituzione elaboriamo solo l'equazione risultante

$$x^2 + 4(a-x)^2 + 2a(a-x) = 0$$
$$x^2 + 4(a^2 + x^2 - 2ax) + 2a^2 - 2ax = 0$$
$$x^2 + 4a^2 + 4x^2 - 8ax + 2a^2 - 2ax = 0$$
$$5x^2 - 10ax + 6a^2 = 0$$

il $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac} = 25a^2 - 30a^2 < 0$ la retta è esterna alla circonferenza

Coordinate del centro $\mathbf{C(\alpha, \beta) = (0, -a/2)}$

Infatti dai coefficienti $\mathbf{a = -2\alpha}$ e $\mathbf{b = -2\beta}$ da cui i valori dell'esercizio che si sta svolgendo

$$\boldsymbol{\alpha = -a/2 = 0} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\beta = -b/2 = -a/2}$$

La retta è y = 2(a – x) cioè y = 2a – 2x ed ancora 2x + y – 2a = 0

Mediante la formula $d = \left| \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \right|$

otteniamo

$$d = \left| \frac{2(0) + 1(-\frac{a}{2}) + (-2a)}{\sqrt{(4+1)}} \right| = \left| \frac{-\frac{a}{2} - 2a}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\frac{-a-4a}{2}}{\sqrt{5}} \right| = \left| \frac{\frac{-5a}{2}}{\sqrt{5}} \right| = \left| -\frac{5a}{2}\frac{1}{\sqrt{5}} \right| = \left| -\frac{5a}{2\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right| =$$

$$= \left| -\frac{5a\sqrt{5}}{2 \bullet 5} \right| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

Problema 13

Dal centro della circonferenza $x^2 + y^2 = 2ax$ è tracciata la retta parallela alla retta x + 2y = 0. Detti A e B i punti d'intersezione tra la retta e la circonferenza, determinare l'area del triangolo AOB.

Ricerca della retta parallela alla retta s) x + 2y = 0 con m = – a/b = –1/2
La retta r) parallela alla retta dat avrà m' = m e passerà per il centro C di coordinate

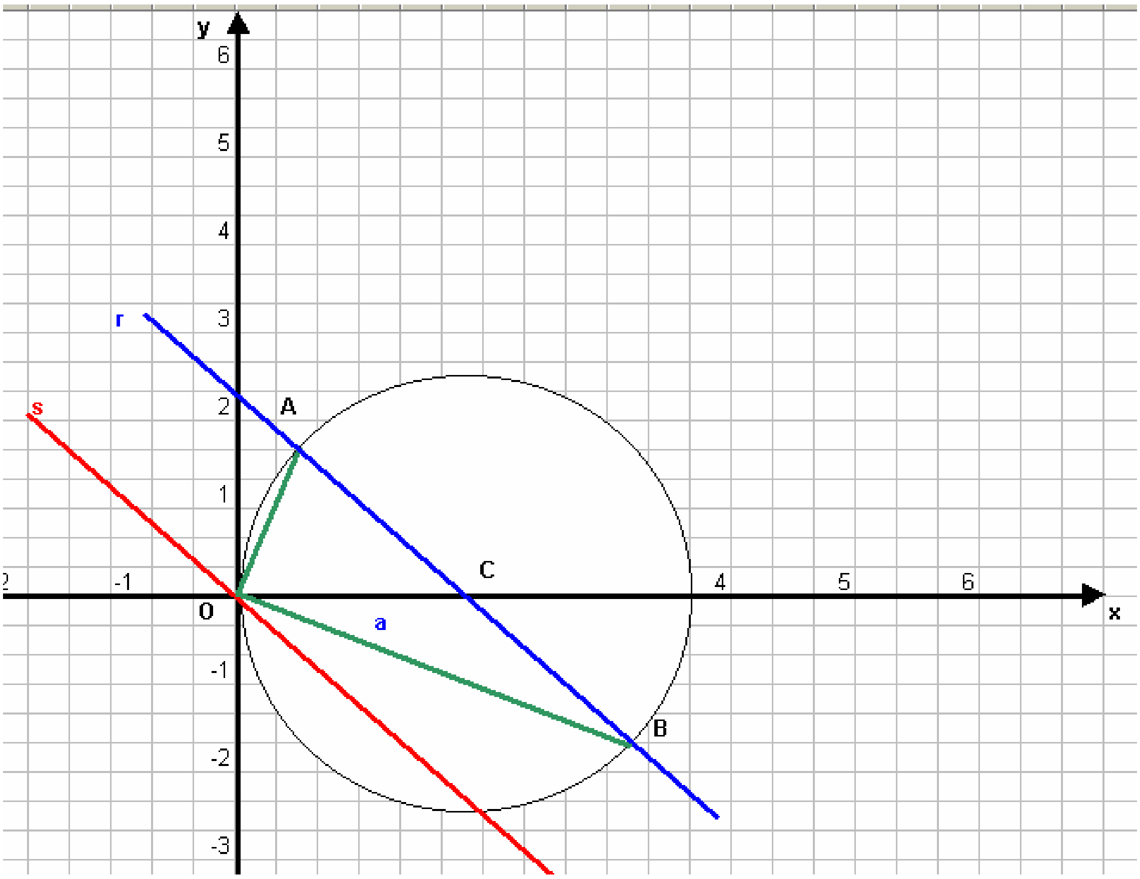
C(α , β) =(a , 0)

Infatti dai coefficienti **a = –2 α** e **b = –2 β** da cui i valori dell'esercizio che si sta svolgendo

α = – a /2 = 2a/2=a e **β = – b / 2 = 0**

applicando la y – y' = m (x – x') abbiamo

r) y – 0 = –1/2(x – a) 2y = – x + a **x + 2y – a = 0**



Ricerchiamo ora i punti d'intersezione A e B tra la retta r) e la circonferenza data $x^2 + y^2 = 2ax$ mettiamo le due equazioni a sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ay = 0 \\ x + 2y - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a - 2y \\ (a - 2y)^2 + y^2 = 2a(a - 2y) \end{cases}$$

Dopo la sostituzione elaboriamo solo l'equazione risultante

$$a^2 - 4ay + 4y^2 + y^2 = 2a^2 - 4ay$$
$$5y^2 = 2a^2 - a^2$$
$$5y^2 = a^2$$

da cui $y_{12} = \pm \dfrac{a}{\sqrt{5}}$

quindi per $x_1 = a + \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5} + 2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a(\sqrt{5} + 2)}{\sqrt{5}}$

e per $x_2 = a - \dfrac{2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a\sqrt{5} - 2a}{\sqrt{5}} = \dfrac{a(\sqrt{5} - 2)}{\sqrt{5}}$

In definitiva le coordinate dei tre vertici del triangolo sono

$A\,(x_1,y_1) = \left(\dfrac{a(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}}, -\dfrac{a}{\sqrt{5}}\right)$ O (0,0)

$B(x_2,y_2) = \left(\dfrac{a(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}}, \dfrac{a}{\sqrt{5}}\right)$

Per il calcolo della superficie ci avvaliamo ancora della formula di Sarrus

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left[(x_1y_21 + y_11x_3 + 1x_2y_3) - (1y_2x_3 + x_11y_3 + y_1x_21)\right]$$

− − − + + +

Da cui nel nostro caso:

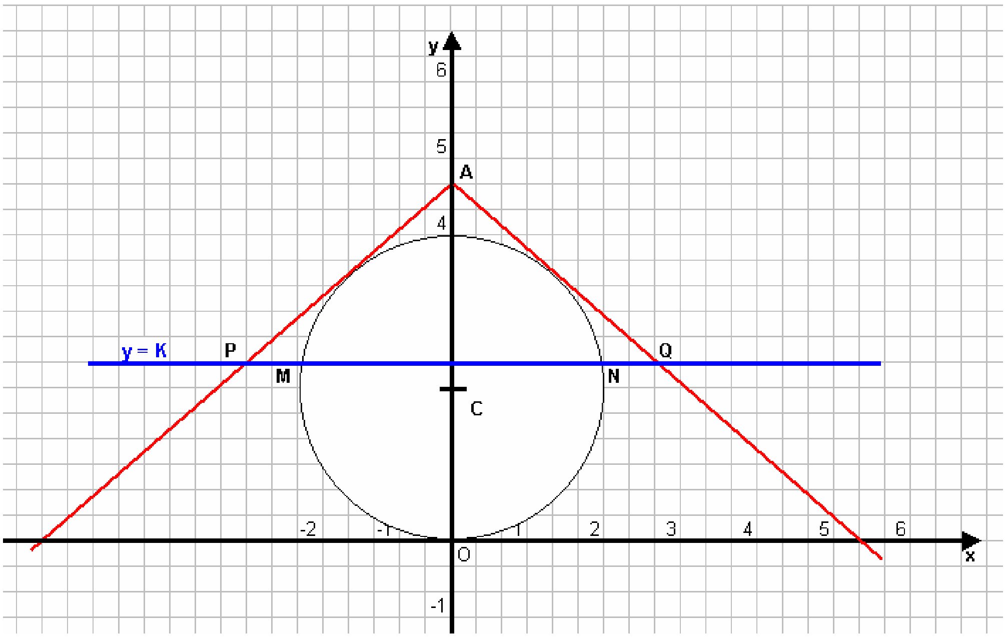
$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \frac{a(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}} & -\frac{a}{\sqrt{5}} & 1 & \frac{a(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}} & -\frac{a}{\sqrt{5}} \\ \frac{a(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} & \frac{a}{\sqrt{5}} & 1 & \frac{a(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}} & \frac{a}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{a}{\sqrt{5}} \bullet \frac{a(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}} + \frac{a}{\sqrt{5}} \bullet \frac{a(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{a^2(\sqrt{5}+2)}{5} + \frac{a^2(\sqrt{5}-2)}{5}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{a^2\sqrt{5} + 2a^2 + a^2\sqrt{5} - 2a^2}{5}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{2a^2\sqrt{5}}{5}\right| = \frac{a^2\sqrt{5}}{5}$$

Problema 14

Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 4y = 0$ determinare le rette tangenti alla circonferenza (se ve ne sono), e passanti per il punto A(0,6).

Data la retta y = k che interseca la circonferenza in MN e le due tangenti nei punti P e Q, sussiste la relazione PQ/MN = 2. Determinarne le coordinate.



L'equazione della retta per A(0,6) ha equazione

$y - y_A = m (x - x_A)$ cioé

$y - 6 = m (x - 0)$;

equazione che andrà messa a sistema con l'equazione della circonferenza

ottenendo:

$$\begin{cases} y - 6 = m (x - 0) \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx + 6 \\ x^2 + m^2x^2 + 36 + 12mx - 4mx - 24 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + 6 \\ x^2 + (mx + 6)^2 - 4(mx + 6) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx + 6 \\ x^2 (1+ m^2)+ 8mx + 12 = 0 \end{cases}$$

da quest'ultima equazione imponiamo la condizione di tangenza : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$
$16m^2 - 12(1+m^2) = 0$
$4m^2 - 12 = 0$
$m^2 = 3$ da cui $m = \pm\sqrt{3}$ coefficiente angolare delle due tangenti cercate :
$y - 6 = \sqrt{3}\ x$ e $y - 6 = -\sqrt{3}\,x$.
Passiamo ora alla seconda parte dell'esercizio.
La retta y = K è parallela all'asse delle ascisse, determiniamo in funzione del parametro le sue intersezioni con la circonferenza data :

$$\begin{cases} y = K \\ x^2 + y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = K \\ x^2 + K^2 - 4K = 0 \end{cases}$$

$x^2 = 4K - K^2$
$x = \pm\sqrt{-K^2 + 4K}$

dalla risoluzione dell'equazione in x scritta otteniamo il valore delle due ascisse cercate M_x ed N_x mentre l'ordinata è data dalla retta parametrica.

$M (-\sqrt{-K^2 + 4K}\ , K)$ e $N (\sqrt{-K^2 + 4K}\ , K)$

$MN = |N_x - M_x| = |\sqrt{-K^2 + 4K} + \sqrt{-K^2 + 4K}\ | = 2\sqrt{-K^2 + 4K}$

Dalla relaione imposta dal testo abbiamo PQ = 2 MN quindi :

PQ = 2 MN = $2\,(2\sqrt{-K^2+4K}\,) = 4\sqrt{-K^2+4K}$ (**)

Inoltre il valore di PQ è pari anche all'intersezione della retta parametrica con le tangenti; in particolare lo calcoliamo solo per il punto Q, e da considerazioni analoghe alla precedenti avremo la distanza completa PQ:

$$\begin{cases} y = K \\ y = \sqrt{3}\,x + 6 \end{cases} \qquad x = \frac{K-6}{\sqrt{3}} \qquad PQ = |2x| = \frac{2(K-6)}{\sqrt{3}} \quad (*)$$

Concludendo dall'uguaglianza tra i valori di PQ ottenuti avremo i valore del parametro K cercato (ordinata della retta data):

$$\frac{2(K-6)}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{4K-K^2}$$
$$\frac{(K-6)^2}{3} = (2\sqrt{4K-K^2}\,)^2$$
$$(K-6)^2 = 12\left(4K-K^2\right)$$

$K^2 + 36 - 12K - 48K + 12K^2 = 0$

$13K^2 - 60K + 36 = 0$

$$K_{12} = \frac{30 \pm \sqrt{900-468}}{26} = \frac{30 \pm \sqrt{432}}{26}$$

Per i valori di P_x e Q_x cercati basterà sostituire nella (*) per ottenerli, così come per M_x ed N_x si dovranno dividere per 2 dalla (**).

Problema 15

Data la circonferenza di centro C(–1; –2) e la retta tangente t) x + y – 2 = 0, determinare la circonferenza.

I° modo)

L'equazione della circonferenza cercata è del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

I coefficienti a e b li otterremo sfruttando le coordinate del centro date, mentre il coefficiente c lo si otterrà mettendo a sistema la circonferenza con la retta data, vediamolo:

dalle coordinate del centro $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ = (–1, –2) cioè

$-\frac{a}{2} = -1$ da cui a = 2 $\qquad -\frac{b}{2} = -2$ da cui b = 4

ne consegue l'espressione per la circonferenza

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + c = 0$$

che messa a sistema con la retta data dara il coefficiente cercato:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 4y + c = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 - y \\ (2 - y)^2 + y^2 + 2(2 - y) + 4y + c = 0 \end{cases}$$

come al solito elaboriamo l'ultima equazione
$4 - 4y + y^2 + 4 - 2y + 4y + c = 0$

$2y^2 - 2y + 8 + c = 0$ imponiamo la condizione di tangenza : $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ (N. B. : con il $\Delta/4$)
$1 - 2(8 + c) = 0$
$1 - 16 - 2c = 0$
$-2c = 15$
$\mathbf{c = -15/2}$
Da cui l'equazione cercata

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15/2 = 0$$
$$\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y - 15 = 0}$$

II° modo)
Determiniamo il raggio come distanza tra il centro C(–1;–2) ed il punto di tangenza con la retta t) $x + y - 2 = 0$:

$$r = d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right| = \left|\frac{-1-2-2}{\sqrt{1+1}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{2}}\right|$$

Conseguentemente $PC^2 = r^2$ quindi dalla formula $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ abbiamo

$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25/2$$
$$2(x^2 + 2x + 1) + 2(y^2 + 4y + 4) = 25$$
$$2x^2 + 4x + 2 + 2y^2 + 8y + 8 - 25 = 0$$
$$\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 4x + 8y - 15 = 0} \quad \text{C.V.D.}$$

Problema 16

Date le circonferenze c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$; c') $x^2 + y^2 - 2y = 0$ determinare il fascio e le sue caratteristiche e la sua natura.
L'equazione del fascio è data da

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 + t(x^2 + y^2 - 2y) = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 + tx^2 + ty^2 - 2ty = 0$$
$$x^2(1+t) + y^2(1+t) - 2x + (t - 2)y + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - \frac{2x}{1+t} + \frac{2(t-2)}{1+t}y + \frac{1}{1+t} = 0$$
$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = \left(\frac{1}{1+t}, -\frac{t-2}{1+t}\right)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{(1+t)^2} + \frac{4(t-2)^2}{(1+t)^2} - \frac{4}{1+t}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + 4(t^2 - 4t + 4) - 4(1+t)}{(1+t)^2}} =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4 + 4t^2 - 16t + 16 - 4 - 4t}{(1+t)^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4t^2 - 20t + 16}{(1+t)^2}}$$

Vediamone la natura, cioè

$$\frac{4t^2 - 20t + 16}{(1+t)^2} > 0$$

Da cui

$$4t^2 - 20t + 16 \geq 0$$
$$t^2 - 5t + 4 \geq 0$$

$$t_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 & \text{è soluzione} \\ 4 & \text{è soluzione} \end{cases}$$

Soluzioni a > 0 $\Delta > 0$ $f(t) > 0$ verificata per valori esterni **$x < 1$ $x > 4$**
con $x \neq -1$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \\ -1 & x^2 + y^2 \quad - 2y \quad = 0 \\ \hline & // \quad // - 2x + 6y + 1 = 0 \end{array}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ -2x + 6y + 1 = 0 \end{cases}$$ fascio di circoli esterni $\Delta < 0$

$$\begin{cases} x = \dfrac{6y+1}{2} = 3y + \dfrac{1}{2} \\ (3y + \dfrac{1}{2})^2 + y^2 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$9y^2 + \frac{1}{4} + 3y + y^2 - 2y = 0$$

$$10y^2 + y + \frac{1}{4} = 0$$

Problema 17

Dopo aver studiato la natura del fascio di circonferenze $(1+k)x^2 + (1+k)y^2 - 12x - 4(1+k)y = 0$
Con k € R, determinare il valore di k per cui si ottiene :

a) **la circonferenza passante per $(-1, -1)$**
b) **la circonferenza tangente nell'origine alla retta $3x + 2y = 0$**
c) **la circonferenza che ha il centro sulla retta $x + y + 4 = 0$**
d) **la circonferenza che ha il raggio pari a $\sqrt{5}$.**

a) $x^2 + kx^2 + y^2 + ky^2 - 12x - 4y - 4ky = 0$
$x^2 + y^2 - 12x - 4y + k(x^2 + y^2 - 4y) = 0$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + y^2 - 12x - 4y = 0 \\ -1 & -x^2 - y^2 \quad + 4y = 0 \\ \hline & // \quad // \quad -12x \quad // = 0 \end{array}$$ ne consegue $x = 0$

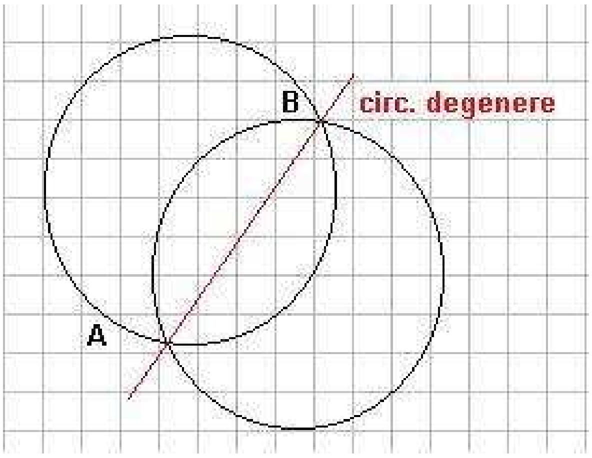
Quindi per capire la natura del fascio:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$+ y^2 - 4y = 0$

$y (y - 4) = 0$ due soluzioni reali e distinte $y = 0$ e $y = 4$ (punti base dell'asse radicale)
è un **fascio di circoli secanti** e la circonferenza passante per P(–1, –1) ha per il valore di k pari a:

$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + k (x^2 + y^2 - 4y) = 0$$
$$1 + 1 + 12 + 4 + k(1 + 1 + 4) = 0$$
$$18 + 6k = 0$$
$$6k = -18$$
$$\mathbf{k = -3}$$



N.B : $k \neq -1$ perché se $k = 1$ si otterrebbe l'equazione di una retta o meglio l'equazione della retta coincidente con la circonferenza degeneredel fascio che ha raggio infinito.

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 4y + k (x^2 + y^2 - 4y) = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{2}x \\ x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 12x - 4\left(-\frac{3}{2}x\right) + k\left[x^2 + \frac{9}{4}x^2 - 4\left(-\frac{3}{2}x\right)\right] = 0 \end{cases}$$

$4x^2 + 9x^2 - 48x + 24x + 4kx^2 + 9kx^2 + 24kx = 0$
$13x^2 - 24x + 13kx^2 + 24kx = 0$
$13x^2 (1 + k) + 24x (k - 1) = 0$

da questa equazione l'unico valore accettabile per il parametro k è $k - 1 = 0$ cioè $k = 1$, questo per lo stesso motivo già discusso nel punto precedente.

c) $(1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 - 12x - 4(1 + k)y = 0$
dividiamo per $k + 1 \neq 0$ ottenendo

$$x^2 + y^2 - \frac{12}{(1+k)}x - 4y = 0 \quad (*)$$

la caratteristiche di questa circonferenza è che il suo centro di coordinate

$$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(\frac{12}{2(1+k)},+\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{6}{1+k},2\right)$$

deve appartenere alla retta x + y + 4 = 0, cioè deve soddisfarne l'equazione, cioè

$$\frac{6}{1+k}+2+4=0 \quad \text{da cui}$$

$$6(1 + k) + 6 = 0$$

$$6 + 6k +6 = 0$$

$$6k = -12$$

$$\mathbf{k = -2}$$

d) analogamente al punto precedente dell'equazione (*)ci interessa il raggio il cui valore è dato da

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(12)^2}{(1+k)^2}+(-4)^2}$$ il valore del raggio è dato da r = $\sqrt{5}$

uguagliando avremo il valore del parametro cercato

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(12)^2}{(1+k)^2}+(-4)^2}=\sqrt{5}$$

$$\left(\sqrt{\frac{144}{(1+k)^2}+(-4)^2}\right)^2=(2\sqrt{5})^2$$

$$144 +16(1+k)^2 = 20\,(1+k)^2$$

$$144 + 16\,(1 + 2k + k^2) - 20(1 + 2k + k^2) = 0$$

$$-4k^2 - 8k + 140 = 0$$

$$4k^2 + 8k - 140 = 0 \quad \text{da cui}$$

$$k_{12} = -1\pm\sqrt{1+35} = -1 \pm 6 \begin{cases} \mathbf{k_1 = -7} \\ \mathbf{k_2 = 5} \end{cases}$$

Problema 18

Dati i punti base A(2,0) e B(-1,2) costruire il fascio, indi determinare la circonferenza tangente all'asse delle x (valore del parametro).

- ricerca del fascio

Retta passante per due punti

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

nel nostro caso è

$$\frac{y-0}{2-0}=\frac{x-2}{-2-1}$$

2x + 3y – 4 = 0

inoltre il centro ha coordinate

$$C=\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{2-1}{2};\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2};1\right)$$

- distanza dei due punti AB

d =AB = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2+1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{13}$ $\qquad$ $r=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$

Di conseguenza l'equazione della circonferenza con centro C e raggio r avrà espressione

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{13}{4}$$

$$x^2 - x + 1/4 + y^2 - 2y + 1 = 13/4$$
$$x^2 - x - 12/4 + y^2 - 2y + 1 = 0$$
$$x^2 + y^2 - x - 2y - 2 = 0$$

Equazione del fascio cercata

$$x^2 + y^2 - x - 2y - 2 + t\,(2x + 3y - 4) = 0$$
$$x^2 + y^2 - x - 2y - 2 + 2tx + 3ty - 4t = 0$$
$$x^2 + y^2 + x(2t - 1) + y(3t - 2) - 4t - 2 = 0$$

determiniamo ora il valore del parametro t, per cui si ha l'equazione della circonferenza tangente all'asse x ; l'asse x ha per equazione y = 0 da cui :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 + x(2t - 1) + y(3t - 2) - 4t - 2 = 0 \end{cases}$$

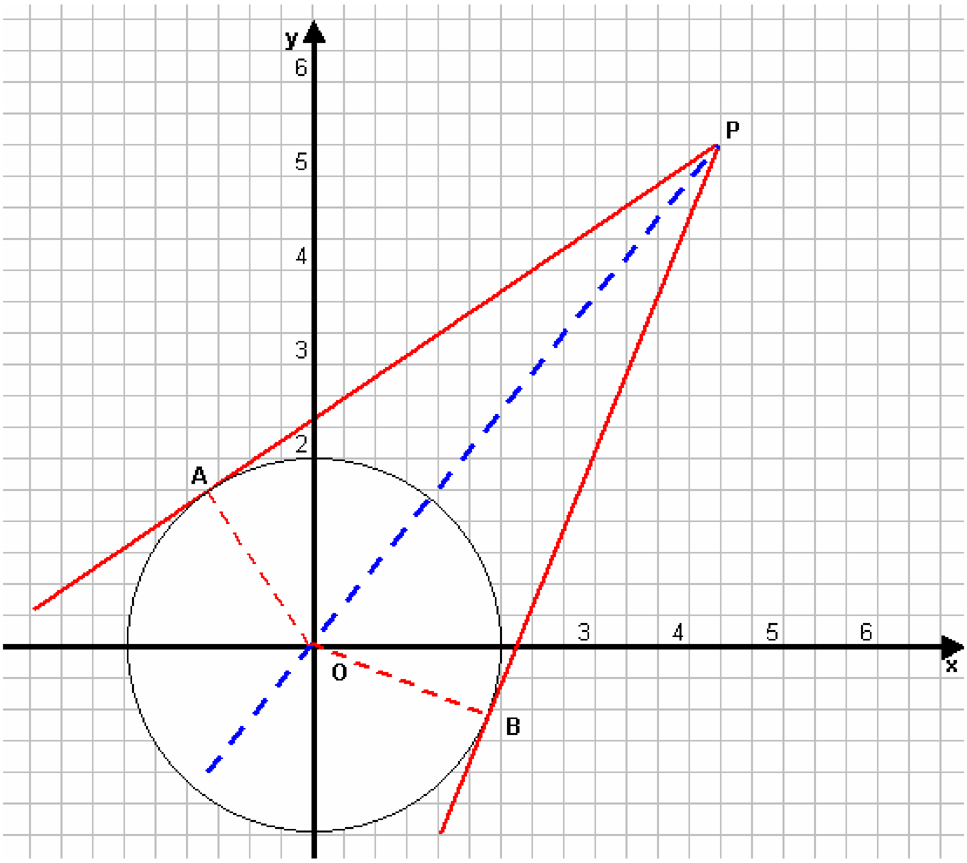
Sostituiamo la 1^ equaz. nella seconda elaborandola

$x^2 + y^2 + x(2t - 1) + 4t - 2 = 0$ imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ abbiamo

$$(2t - 1)^2 - 4(-4t - 2) = 0$$
$$4t^2 - 4t + 1 + 16t + 8 = 0$$
$$4t^2 + 12t + 9 = 0$$
$$(2t + 3)^2 = 0 \text{ ne consegue}$$
$$\mathbf{t = -3/2}$$

Problema 19

Si considerino la circonferenza $x^2 + y^2 - 2ky = 0$, il punto P(4,5) e le tangenti alla circonferenza uscenti da P; siano A e B i punti di tangenza. Determinare per quale valore di k i segmenti PA e PB sono lunghi 3.



Dalla condizione di tangenza dopo l'intersezione della retta generica per P con la circonferenza, nulla si potrà dire, mentre notiamo che :

$$O = (\alpha, \beta) =$$

$$=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(0,+\frac{k}{2}\right)$$

Inoltre

$$r=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}=$$

$$=\sqrt{\frac{k^2}{4}}=\frac{k}{2}$$

Quindi la

$$d = PO = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-0)^2 + \left(5 + \frac{k}{2}\right)^2} = \sqrt{16 + 25 + \frac{k^2}{4} - 10\frac{k}{2}} =$$

$$= \sqrt{41 + \frac{k^2}{4} - 5k} = \sqrt{\frac{k^2 - 20k + 164}{4}}$$

Applicando Pitagora al triangolo APO, cioè $PO^2 - AO^2 = 3^2$ abbiamo

$$\frac{k^2 - 20k + 164}{4} - \frac{k^2}{4} = 9$$

$$k^2 - 20k + 164 - k^2 = 36$$

$$20k = 128$$

$$k = \frac{128}{20} = \frac{32}{5}$$

Problema 20

Nel fascio di rette generatrici x + y + 3 = 0 e 2x + y + 8 = 0 determinare le rette tangenti alla circonferenza di centro C(2,-3) e passante per T(6,0). Determinare inoltre l'equazione della circonferenza concentrica alla precedente che stacchi sulla bisettrice del 1° e 3° quadrante un segmento di lunghezza 4√3. (fig. nella pagina successiva)

- Iniziamo con il determinare il centro del fascio (proprio) :

$$\begin{array}{r l} -1 & \begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ \underline{2x + y + 8 = 0} \\ x \quad // \; + 5 = 0 \end{cases} \qquad \mathbf{x = -5} \end{array}$$

inoltre dalla 1^ equaz.

$y = -x - 3$ da cui **$y = 2$**

Il centro cercato ha coordinate **P (– 5 , 2)**

- Determiniamo ora l'equazione della circonferenza sfruttando la formula della distanza tra le coordinate di due punti per avere la misura del raggio con C(2, –3) e T(6,0)

Essendo $r = TC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6-2)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{16+9} = 5$

Quindi

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25 \text{ da cui}$$

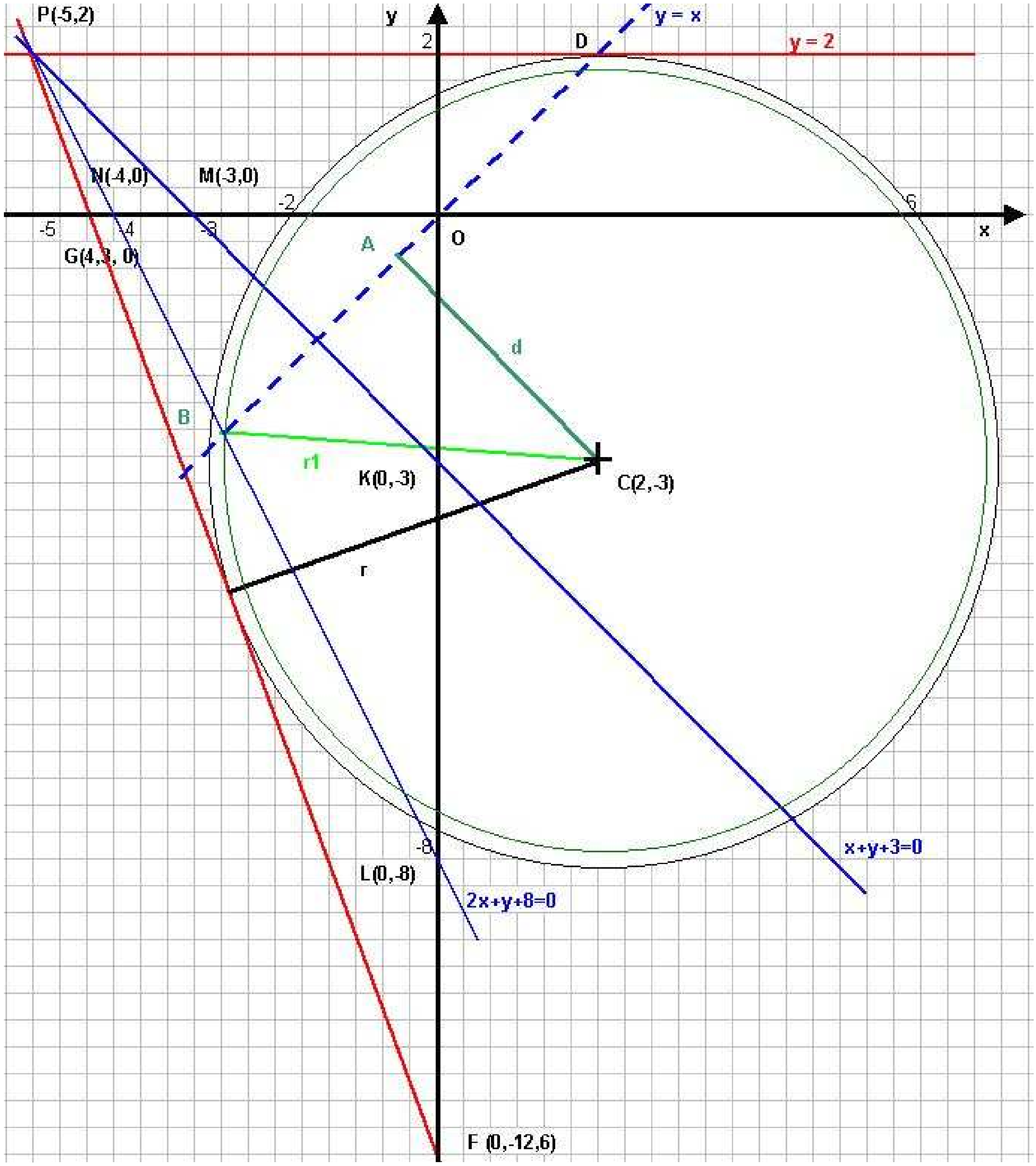
$$\mathbf{x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0}$$

- Ricerca delle tangenti alla circonferenza passanti per il punto **P (– 5 , 2)**; procederemo mettendo a sistema l'equazione generica di una retta passante per un punto con la circonferenza trovata imponendo infine la condizione $\Delta = 0$

Equaz. retta generica per un punto $y - y_1 = m(x - x_1)$ quindi

$$y - 2 = m(x+5)$$

$$\begin{cases} y = m(x+5) + 2 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0 \end{cases}$$



Sostituiamo la 1^ nella seconda ed elaboriamo quest'ultima

$$x^2 + \mathbf{(}m (x + 5) + 2\mathbf{)}^2 - 4x + 6(m (x + 5) + 2) - 12 = 0$$
$$x^2 + \mathbf{(}m^2 (x+5)^2 + 4 + 4m(x + 5)\mathbf{)} - 4x + 6m(x + 5) + 12 - 12 = 0$$
$$x^2 + m^2(x^2 + 10x + 25) + 4 + 4mx + 20m - 4x + 6mx + 30m = 0$$
$$x^2 + m^2x^2 + 10\, m^2x + 25\, m^2 + 4 + 10mx - 4x + 50m = 0$$
$$x^2(1 + m^2) + 2x(5m^2 + 5m - 2) + 50m + 4 + 25\, m^2 = 0$$

imponiamo $\mathbf{\Delta/4} = 0$

$$(5m^2 + 5m - 2)^2 - (1 + m^2)(50m + 4 + 25\, m^2) = 0$$
$$25m^4 + 25m^2 + 4 - 20m^2 - 20m + 50m^3 - (25m^2 + 50m + 4 + 25m^4 + 50m^3 + 4m^2) = 0$$

$$25m^4 + 25m^2 + 4 - 20m^2 - 20m + 50m^3 - 25m^2 - 50m - 4 - 25m^4 - 50m^3 - 4m^2 = 0$$
$$-20m^2 - 20m + 4 - 50m - 4 - 4m^2 = 0$$
$$-24\,m^2 - 70m = 0$$
$$12\,m^2 + 35m = 0$$
$$m(12m + 35) = 0$$
$$\mathbf{m_1 = 0}$$
$$\mathbf{m_2 = -\frac{35}{12}}$$

da cui le equazioni delle rette tangenti cercate:

$\mathbf{y = 2}$ e $\mathbf{y = -\frac{35}{12}(x + 5) + 2}$ (nella figura sono tracciate in rosso)

- Per la seconda parte del problema sappiamo che l'equazione della bisettrice 1° e 3° quadrante è y = x (cioè y - x = 0), ne determiniamo la distanza dal centro C(2,-3) con la formula:

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right| = \left|\frac{y - x}{\sqrt{1+1}}\right| = \left|\frac{-2-3}{\sqrt{2}}\right| = \left|\frac{-5}{\sqrt{2}}\right|$$

Non resta che applicare il teorema di Pitagora al triangolo ABC dove AB = BD/2 = $\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

Quindi

$$r_1 = BC = \sqrt{(AB)^2 + (AC)^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{12 + \frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{24+25}{2}} = \sqrt{\frac{49}{2}}$$

Concludendo l'equazione della circonferenza cercata concentrica alla data con C(2,-3) avrà espressione:

$\mathbf{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 49/2}$

Problema 21

Detto C il centro della circonferenza $2x^2 + 2y^2 + 5x + 7y = 0$, determinare le equazioni delle rette r ed s perpendicolari alla retta $3x + y + 2 = 0$ e che hanno distanza $\sqrt{\frac{2}{5}}$ da C.

Determinare il perimetro del quadrilatero convesso avente per vertici i punti d'intersezione di r ed s con gli assi.

Esplicitiamo e precisiamo i dati:

Circonferenza $2x^2 + 2y^2 + 5x + 7y = 0$

$C = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right)$; passa per l'origine O = (0,0) ;

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{74}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2}} \approx 4{,}3$$

Retta m) $3x + y + 2 = 0$

$m = -a/b = -3$

m

	x	y
A	0	–2
B	–2/3	0

Determiniamo la retta **n** parallela alla retta **m** e passante per C (dove le rette **r** ed **s** hanno distanza $d = \sqrt{\frac{2}{5}}$)

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{quindi}$$
$$y + \frac{7}{2} = -3\left(x + \frac{5}{2}\right)$$

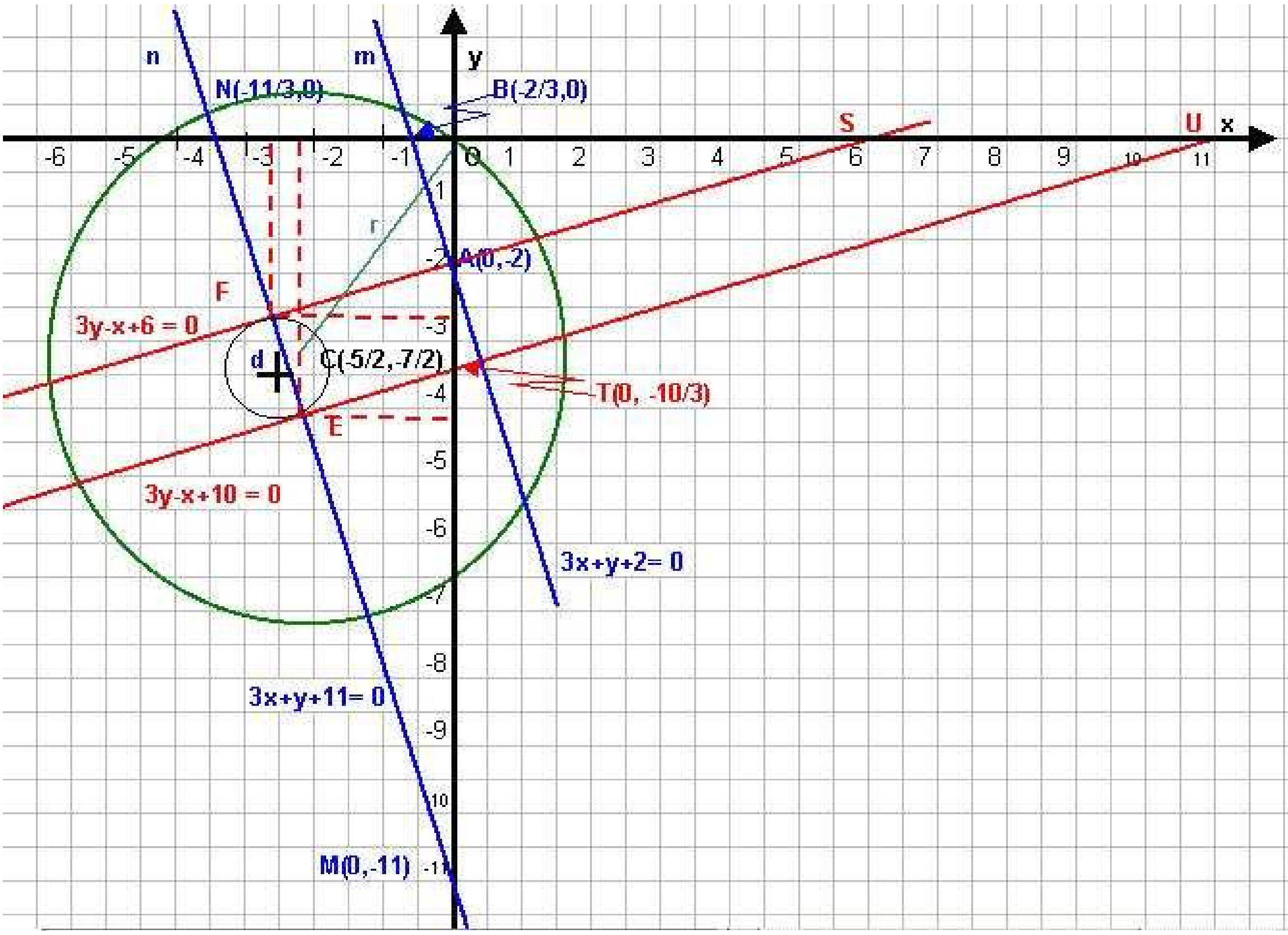
$y + \frac{7}{2} = -3x + \frac{15}{2}$

$y + 3x = -\frac{22}{2}$

$y = -3x - 11$

n

	x	y
M	0	–11
N	–11/3	0



Determiniamo la circonferenza di centro C e raggio $\sqrt{\frac{2}{5}}$ $(\approx 0{,}63)$

$(x + \frac{5}{2})^2 + (y + \frac{7}{2})^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^2$

$x^2 + \frac{25}{4} + \frac{10}{2}x + y^2 + \frac{49}{4} + \frac{14}{2}y = \frac{2}{5}$

$x^2 + y^2 + 5x + 7y + \frac{74}{4} - \frac{2}{5} = 0$

$20x^2 + 20y^2 + 100x + 140y + 370 - 8 = 0$

$10x^2 + 10y^2 + 50x + 70y + 181 = 0$

Ricerchiamo ora i punti d'intersezione di questa circonferenza con la **n,** per questi punti, una volta determinati imporremo il passaggio delle tangenti per essi ortogonali alla retta **m**.

$$\begin{cases} y = -3x - 11 \\ 10x^2 + 10y^2 + 50x + 70y + 181 = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo la 1^ nella seconda ed elaboriamo quest'ultima

$10x^2 + 10(-3x - 11)^2 + 50x + 70(-3x - 11) + 181 = 0$

$10x^2 + 10(9x^2 + 121 + 66x) + 50x - 210x - 770 + 181 = 0$

$10x^2 + 90x^2 + 1210 + 660x - 160x - 589 = 0$
$100x^2 + 500x + 621 = 0$

$$x_{12} = \frac{-250 \pm \sqrt{62500 - 62100}}{100} = \frac{-250 \pm 20}{100} = \begin{cases} x_1 = -\frac{23}{10} \\ x_2 = -\frac{27}{10} \end{cases}$$

Punto **E** $x_1 = -\frac{23}{10}$ e dall'equaz. della retta otteniamo : $y_1 = -3 \cdot -\frac{23}{10} - 11 = \frac{69 - 110}{10} = -\frac{41}{10}$

Punto **F** $x_2 = -\frac{27}{10}$ e dall'equaz. della retta otteniamo : $y_2 = -3 \cdot -\frac{27}{10} - 11 = \frac{81 - 110}{10} = -\frac{29}{10}$

Riassumendo **E** $\left(-\frac{23}{10}, -\frac{41}{10}\right)$; **F** $\left(-\frac{27}{10}, -\frac{29}{10}\right)$

Calcoliamo ora la retta passante per **E** $\left(-\frac{23}{10}, -\frac{41}{10}\right)$ ed ortogonale alla retta (**m**) $3x + y + 2 = 0$ con coefficiente pari al suo antireciproco cioè m'= $-\frac{1}{m} = +\frac{1}{3}$ quindi :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + \frac{41}{10} = +\frac{1}{3}\left(x + \frac{23}{10}\right)$

$\frac{10y + 41}{10} = \frac{1}{3}\left(\frac{10x + 23}{10}\right)$

$30y + 123 = 10x + 23$

$30y - 10x + 100 = 0$
$3y - x + 10 = 0$

retta per **E**

	x	y
T	0	10/3
U	10	0

Calcoliamo ora la retta passante per **F** $\left(-\frac{27}{10}, -\frac{29}{10}\right)$ ed ortogonale alla retta (**m**) $3x + y + 2 = 0$ con coefficiente pari al suo antireciproco cioè m'= $-\frac{1}{m} = +\frac{1}{3}$ quindi :

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y + \frac{29}{10} = +\frac{1}{3}\left(x + \frac{27}{10}\right)$

$\frac{10y + 29}{10} = \frac{1}{3}\left(\frac{10x + 27}{10}\right)$

$30y + 87 = 10x + 27$
$30y - 10x + 60 = 0$

$3y - x + 6 = 0$

retta per **F**

	x	y
R	0	– 2
S	6	0

Il punto R coincide con A

Il quadrilatero **TRSU** è un trapezio scaleno, determiniamone le basi con il teorema di Pitagora:

$b_m = RS = \sqrt{OS^2 + OR^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$B_M = UT = \sqrt{OU^2 + OT^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{900 + 100}{9}} = \sqrt{\frac{1000}{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{10}$

Lati obliqui

$RT = (OT - OR) = (OT - OA) = \frac{10}{3} - 2 = \frac{10 - 6}{3} = \frac{4}{3}$

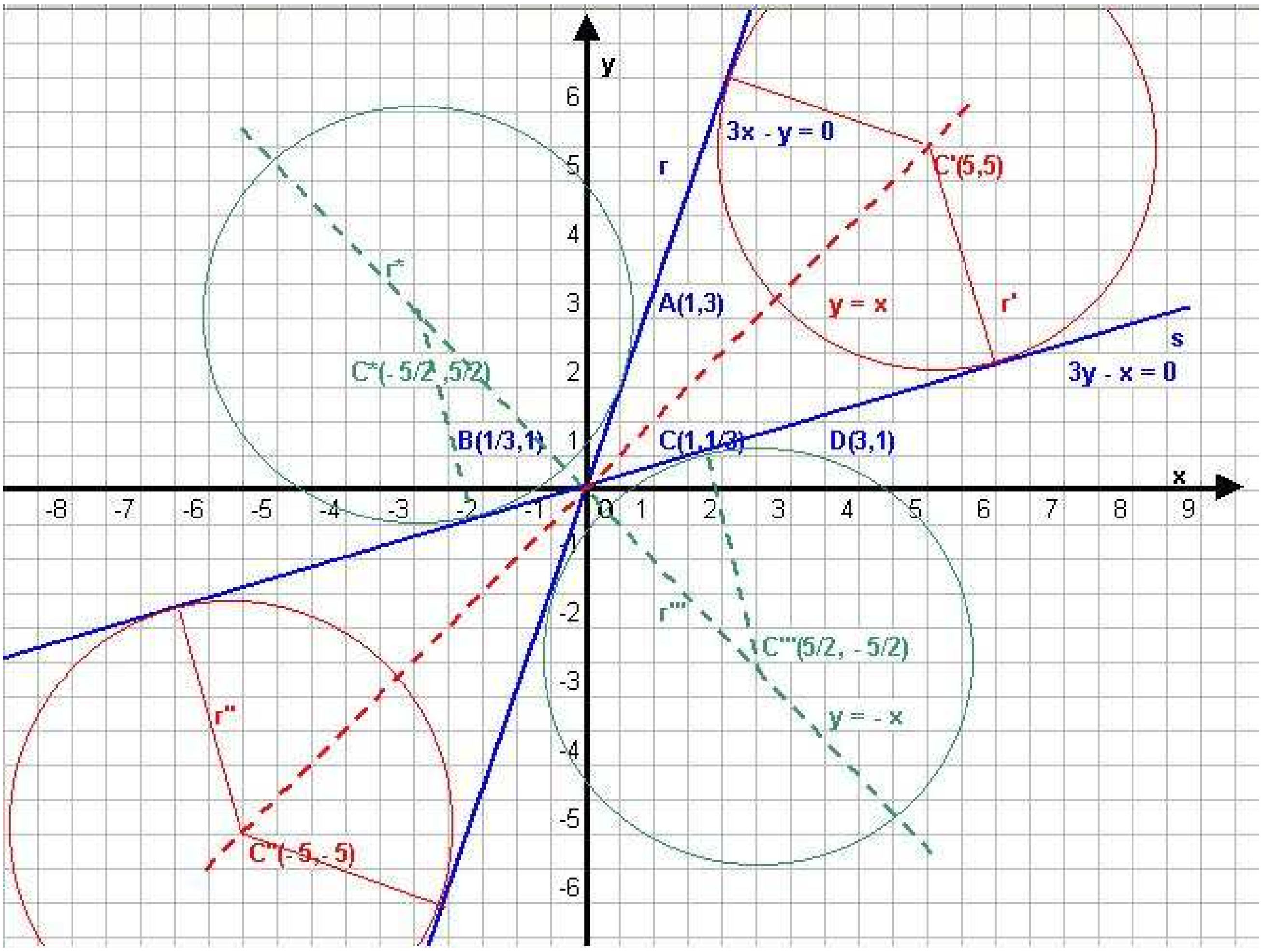
$US = (OU - OS) = 10 - 6 = 4$

Concludendo la misura del perimetro è pari a : $2p = b_m + B_M + RT + US =$

$$= 2\sqrt{10} + \frac{10}{3}\sqrt{10} + \frac{4}{3} + 4 = \frac{6\sqrt{10} + 10\sqrt{10}}{3} + \frac{4+12}{3} = \frac{16 + 16\sqrt{10}}{3} = \frac{16\left(1+\sqrt{10}\right)}{3}$$

Problema 22

Date le rette 3x – y = 0 e 3y – x = 0 determinare le equazioni delle circonferenze tangenti ad entrambe le rette aventi raggio √10.



Iniziamo con il rappresentare le rette:

r) 3x – y = 0

r

	x	y
A	1	3
B	1/3	1

s) 3y – x = 0

s

	x	y
C	1	1/3
D	3	1

Dopo averle rappresentate in figura possiamo dire che le circonferenze cercate hanno i centri posizionati in un “luogo geometrico” che gode della proprietà di essere equidistante da entrambe;

per determinarli applichiamo la formula della distanza punto retta, sia per la retta **r** che per **s** conoscendone la misura d = √10 per entrambe le distanze uguale (raggi) ne determineremo anche i valori delle coordinate, da cui :

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} \right|$$

e nel nostro caso con le rette **r**) 3x – y = 0 ed **s**) 3y – x = 0 abbiamo

$$|d_r| = |d_s|$$

$$\left| \frac{3x' - y'}{\sqrt{(9+1)}} \right| = \left| \frac{3y' - x'}{\sqrt{(9+1)}} \right|$$

le grandezze sono in valore assoluto, da cui i casi:
a) $d_r = d_s$ (uguale a $-d_r = -d_s$)
b) $d_r = -d_s$

Caso a) delle distanze $d_r = d_s$ ricerca del punto **C'(x',y')** ottenendo

3x'– y' = 3y' – x'
3x' + x' = 3y' + y'
4x' = 4y'

x' = y'
ne consegue che
C'(x',y') = C'(x',x')

Quanto trovato ci esprime che il luogo geometrico equidistante da entrambe le rette è la bisettrice del 1° e 3° quadrante ed il centro C' giace su di essa, cerchiamone i valori, riprendiamo la formula della distanza punto retta con **C'(x',y') = C'(x',x')**, quindi

$$|d_r| = \sqrt{10}$$

$$\left| \frac{3x' - y'}{\sqrt{(9+1)}} \right| = \left| \sqrt{10} \right|$$

cioè per quanto detto abbiamo
1) $d_r = \sqrt{10}$
2) $d_r = -\sqrt{10}$

Esaminiamo il sottocaso (a1) con la condizione vista x' = y'

3x' – y' = √10 √10
3x' – x' = 10
2x' = 10

x' = 5 ne consegue **y' = 5**
da cui **C'(x',y') = C'(x',x') = C' (5,5)**
centro della prima circonferenza

Esaminiamo il sottocaso (a2) con la condizione vista x' = y'

3x' – y' = – √10 √10
3x' – x' = – 10
2x' = –10

x' = – 5 ne consegue **y' = – 5**
da cui **C''(x',y') = C''(x',x') = C''(– 5, – 5)**
centro della seconda circonferenza

Caso b) delle distanze $d_r = -d_s$ ricerca del punto **C'''(x',y')** ottenendo

3x'– y' = – (3y' – x')
3x' – y' = – 3y' + x'
3x'– x' = – 3y'+ y'
2x' = – 2y'

x' = – y'
ne consegue che
C'''(x',y') = C'''(x', –x')

Per quanto detto, ora abbiamo determinato il luogo geometrico dell'altro semipiano, bisettrice 2° e 4° quadrante con C''' giacente su di ressa, per i valori procediamo analogamente a come fatto precedentemente con **C'''(x',y') = C'''(x', –x')**, quindi :

$$|d_r| = \sqrt{10}$$

$$\left|\frac{3x'-y'}{\sqrt{(9+1)}}\right| = \left|\sqrt{10}\right|$$

cioè per quanto detto abbiamo

3) $d_r = \sqrt{10}$

4) $d_r = -\sqrt{10}$

Esaminiamo il sottocaso (b3) con la condizione vista x' = – y'

$3x' - y' = \sqrt{10} \quad \sqrt{10}$

$3x' + x' = 10$

$4x' = 10$

$x' = \frac{5}{2}$ ne consegue $y' = -\frac{5}{2}$

da cui

C'''(x',y') = C'''(x', –x') = C'''(5/2, –5/2)

centro della terza circonferenza

Esaminiamo il sottocaso (b4) con la condizione vista x' = - y'

$3x' - y' = -\sqrt{10} \quad \sqrt{10}$

$3x' + x' = -10$

$4x' = -10$

$x' = -\frac{5}{2}$ ne consegue $y' = \frac{5}{2}$

da cui

C*(x',y') = C*(x', –x') = C*(5/2, –5/2)

centro della quarta circonferenza

Ora che abbiamo tutti i centri con le relative coordinate e il raggio (per tutte uguale a √10), determiniamo con semplicità le equazioni delle circonferenze :

1^) **C' (5,5)**

$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 10$

$x^2 + 25 - 10x + y^2 + 25 - 10y = 10$

$\mathbf{x^2 + y^2 - 10x - 10y + 40 = 0}$

2^) **C''(– 5, – 5)**

$(x+5)^2 + (y+5)^2 = 10$

$x^2 + 25 + 10x + y^2 + 25 + 10y = 10$

$\mathbf{x^2 + y^2 + 10x + 10y + 40 = 0}$

3^) **C'''(5/2, –5/2)**

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = 10$$

$x^2 + \frac{25}{4} - 5x + y^2 + \frac{25}{4} + 5y = 10$

$4x^2 + 4y^2 - 20x + 20y + 50 - 40 = 0$

$4x^2 + 4y^2 - 20x + 20y + 10 = 0$

$\mathbf{2x^2 + 2y^2 - 10x + 10y + 5 = 0}$

4^) **C*(5/2, –5/2)**

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{5}{2}\right)^2 = 10$$

$x^2 + \frac{25}{4} + 5x + y^2 + \frac{25}{4} - 5y = 10$

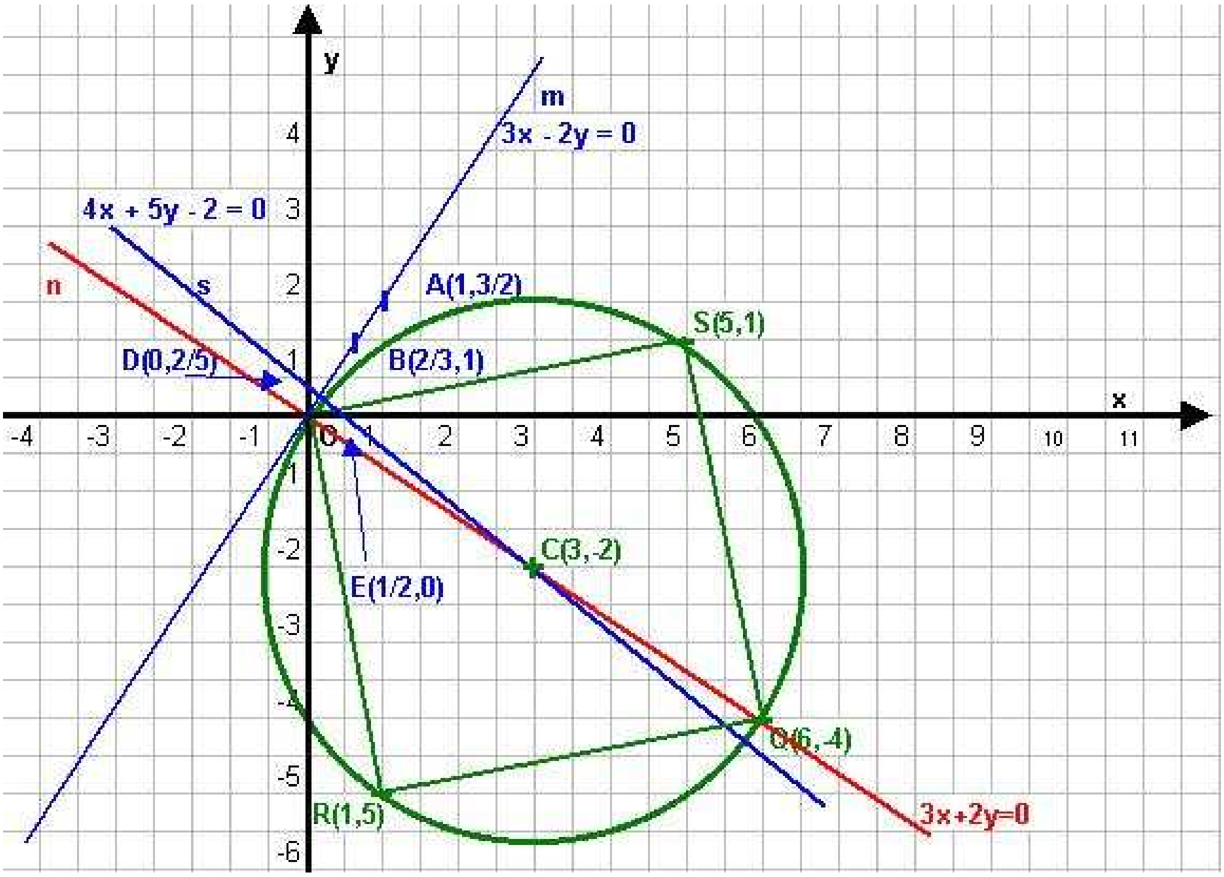
$4x^2 + 4y^2 + 20x - 20y + 50 - 40 = 0$

$4x^2 + 4y^2 + 20x - 20y + 10 = 0$

$\mathbf{2x^2 + 2y^2 + 10x - 10y + 5 = 0}$

Problema 23

Trovare l'equazione della circonferenza passante per O(0,0), tangente alla retta di equazione 3x – 2y = 0 ed avente centro sulla retta di equazione 4x + 5y – 2 = 0. Determinare i vertici e la superficie del quadrato inscritto nella circonferenza e avente un vertice in O.



Iniziamo con il rappresentare le rette:

m) 3x – 2y = 0

r

	x	y
A	1	3/2
B	2/3	1

s) 4x + 5y - 2 = 0

s

	x	y
D	0	2/5
E	1/2	0

n) 2x + 3y = 0

essendo m' = –2/3 e passante per O(0,0)

$y - y_1 = m (x - x_1)$ cioè

y – 0= –2/3(x – 0) da cui l'eq. scritta

n

	x	y
F	1	–2/3
G	–3/2	1

I^ parte

L'equazione di una generica circonferenza passante per l'origine ha espressione:

$x^2 + y^2 + ax + by = 0$

e deve essere tangente alla retta m) 3x – 2y = 0 quindi mettiamole a sistema imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x/2 \\ x^2 + \frac{9x^2}{4} + ax + \frac{3}{2}b = 0 \end{cases}$$

elaboriamo solo quest'ultima

$$\frac{13x^2}{4} + x\left(a + \frac{3b}{2}\right) = 0$$

la cui cond. di tg.za è

$$\left(\frac{2a + 3b}{2}\right)^2 - 0 = 0 \quad \text{1^ equaz.}$$

quest'equazione presenta due incognite a, b se ne deduce che servirà una seconda equazione nelle stesse incognite per determinare i coefficienti della circonferenza cercata; lo faremo considerando che il centro C(–a/2, –b/2) della circonferenza deve appartenere alla retta **s**) 4x + 5y – 2 = 0 data, cioè ne deve soddisfare l'equazione:

$$4\left(-\frac{a}{2}\right) + 5\left(-\frac{b}{2}\right) - 2 = 0$$

$$-4a - 5b - 4 = 0$$

$$a = \frac{-5b - 4}{4} \quad \text{2^ equaz.}$$

Da cui il sistema nelle incognite a e b:

$$\begin{cases} \left(a + \frac{3b}{2}\right)^2 = 0 \\ a = \frac{-5b - 4}{4} \end{cases}$$

sostituiamo la 2^ nella prima ed elaboriamola

$$\left(\frac{-5b - 4}{4} + \frac{3b}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{-5b - 4 + 6b}{4}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{b - 4}{4}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{b^2 - 8b + 16}{16}\right) = 0$$

b^2 - 8b +16 = 0

$$b = 4 \pm \sqrt{16 - 16} = 4$$

ne consegue per

$$a = \frac{-5b - 4}{4} = \frac{-24}{4} = -6$$

In definitiva la circonferenza ha equazione:

$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$ con $C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) = (3, -2)$

Altro modo risolutivo di questa prima parte, e certamente molto più immediato, è dato dalla considerazione che dal disegno sappiamo che dal punto di tangenza O(0,0) il raggio è ortogonale alla tg. Stessa, quindi il centro C giacerà anche sulla retta **n**) oltre che sulla **s**), basterà semplicemente fare sistema queste due rette per trovarne il punto di intersezione :

n (-2) $\begin{cases} 3y + 2x = 0 \\ \\ 5y + 4x = 2 \end{cases}$ **s**

y // = –2 da cui x = 3 ritrovando **C(3, – 2)**

II^ parte

Determiniamo il raggio :

$$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

d (diametro) = diagonale del quadrato = $2\sqrt{13}$

Ricerca del punto **Q** simmetrico di O;

sarà una delle soluzioni del sistema tra la circonferenza ed **n**), quindi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \qquad (x = -\frac{3}{2}y) \end{cases}$$

Come al solito ricaviamo dalla seconda la x e la sostituiamo nella pima elaborando quest'ultima :

$$\frac{9}{4}y^2 + y^2 + \frac{18}{2}y + 4y = 0$$

$$9y^2 + 4y^2 + 36y + 16y = 0$$

$13y^2 + 52y = 0$

$y\,(13y + 52) = 0$ da cui

$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

$y_2 = -\frac{52}{13} = -4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{12}{2} = 6$

Quindi **Q (6,-4).**

Altro modo risolutivo per determinare il punto **Q** notando che è simmetrico di O(0,0) quindi essendo:

$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$ con x_2 e y_2 coordinate di **Q** ed x_m e y_m coordinate di C(3, –2)

$x_2 = 2x_m - x_1 = 6 - 0 = 6 \qquad y_2 = 2y_m - y_1 = -4 - 0 = -4$

ritrovando quanto già visto.

Possiamo già determinare la misura dell'area del quadrato infatti

d = l√2 cioè $l = \frac{d}{\sqrt{2}}$ e nel nostro caso $l = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{26}}{2} = \sqrt{26}$

$A_s = l^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 = 26$

Ricerchiamo infine gli ultimi due vertici del quadrato **R** ed **S .**

Il modo più semplice è calcolare la retta passante per C e parallela alla **m** e farne l'intersezione con la circonferenza trovata:

m) 3x – 2y = 0 con m = 3/2 e C(3 , – 2)

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ quindi

y + 2 = 3/2(x – 3)

2y + 4 = 3x – 9

$$y = \frac{3x - 13}{2}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0 \\ y = \frac{3x-13}{2} \end{cases}$$

Come al solito sostituiamo nella pima elaborando quest'ultima :

$$x^2+\left(\frac{3x-13}{2}\right)^2-6x+4\left(\frac{3x-13}{2}\right)=0$$

$4x^2 + (9x^2 + 169 – 78x) – 24x + 8 (3x – 13) = 0$
$4x^2 + 9x^2 + 169 – 78x – 104 = 0$
$13x^2 – 78x + 65 = 0$

$$x_{12}=\frac{39\pm\sqrt{1521-845}}{13}=\frac{39\pm\sqrt{676}}{13}=\frac{39\pm 26}{13}=$$

$$x_1=\frac{13}{13}=1 \Rightarrow y_1=\frac{3\bullet 1-13}{2}=-\frac{10}{2}=-5$$

$$x_2=\frac{65}{13}=5 \Rightarrow y_2=\frac{15-13}{2}=1$$

Quindi i vertici del quadrato cercati sono :
R (1,-5) ed **S (5 , 1)**

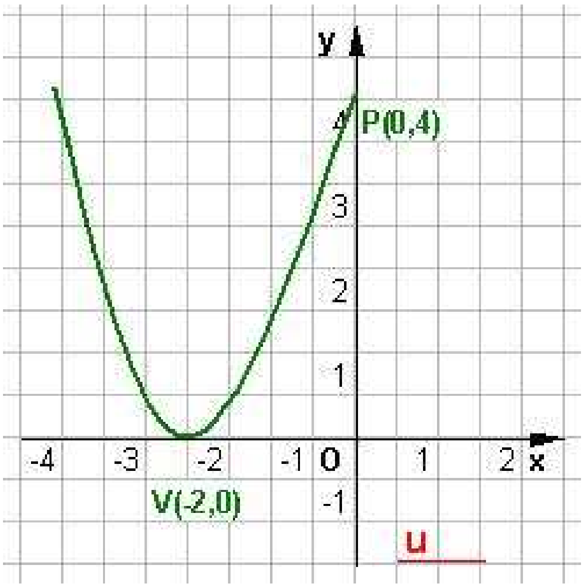
In definitiva se quanto fatto è giusto la controprova la si può fare calcolando il lato del quadrato **RQ** con Pitagora, sapendone già il risultato $\sqrt{26}$:

l = $\sqrt{(x_Q-x_R)^2+(y_Q-y_R)^2}=\sqrt{(6-1)^2+(-4+5)^2}=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$ **C.V.D.**

LA PARABOLA E LE SUE APPLICAZIONI

Problema 1

Determinare l'equazione della parabola di vertice V(−2;0) e passante per P(0;4).



Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:

1)l'appartenenza del punto P alla parabola,

2)l'appartenenza del vertice V alla parabola e

3)la coincidenza dell'ascissa del vertice della parabola con l'ascissa di V.

Si ottengono le tre equazioni

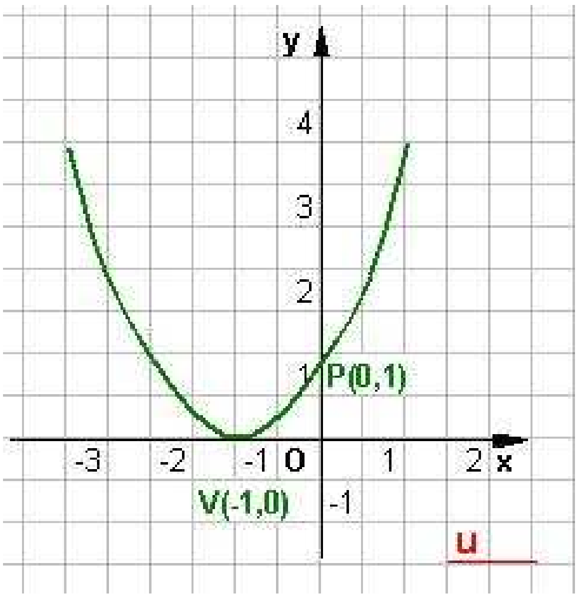
$$\begin{cases} c = 4 \\ 4a - 2b + c = 0 \\ -b/2a = -2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori a = 1, b = 4, c = 4.

Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 4x + 4$

Problema 2

Determinare l'equazione della parabola di vertice V(−1;0) e passante per P(0;1).



Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:

1)l'appartenenza del punto P alla parabola,

2)l'appartenenza del vertice V alla parabola e

3)la coincidenza dell'ascissa del vertice della parabola con l'ascissa di V.

Si ottengono le tre equazioni

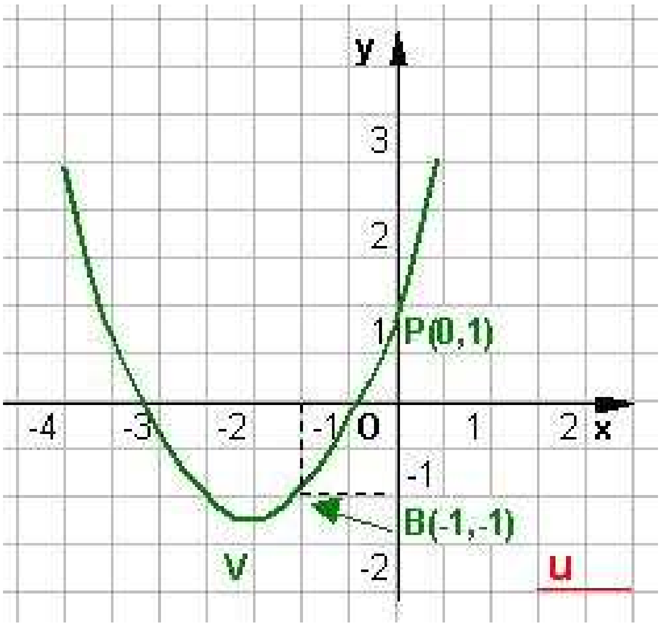
$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 0 \\ -b/2a = -1. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori a = 1, b = 2, c = 1.

Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 2x + 1$

Problema 3

Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per P(0; 1), per B (−1 ; −1) e ivi tangente alla retta y − x = 0 .



Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:
1)l'appartenenza del punto P alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B alla parabola e
3)la condizione di tangenza tra la parabola e la retta y = x.

Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = -1 \\ (b-1)2 - 4a\,c = 0 \end{cases}$$

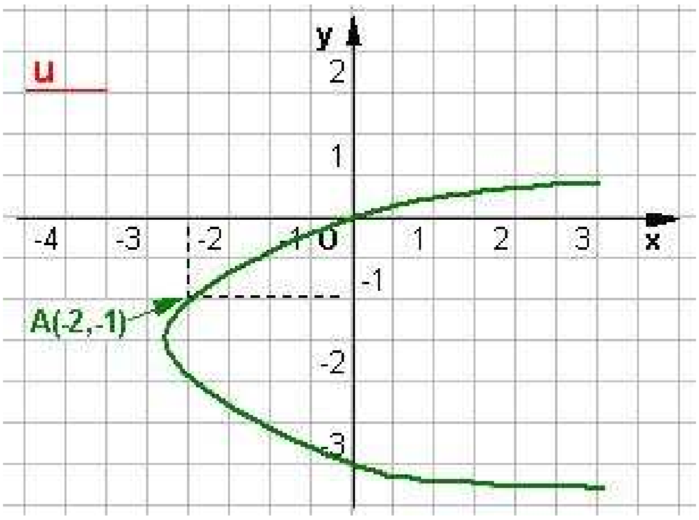
Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori

$$a = 1,\ b = 3,\ c = 1.$$

Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 3x + 1$.

Problema 4

Determinare l'equazione della parabola, con asse parallelo all'asse x, passante per A (-2 ; -1), per B (0 ; -3) e per O (0 ; 0).



Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2 + by + c$$

basta imporre:
1)l'appartenenza del punto A alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B e
3)l'appartenenza del punto O.

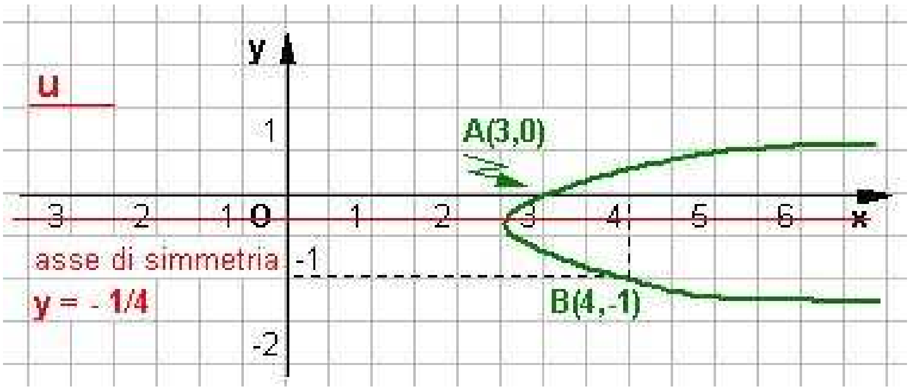
Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} c = 0 \\ a - b + c = -2 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1,\ b = 3,\ c = 0$.
Dunque l'equazione della parabola è: $x = y^2 + 3y$.

Problema 5

Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x, avente per asse la retta y = –1/4 , passante per A (3 ; 0) e B (4 ; –1).



Considerata l'equazione della parabola

$x = ay^2 + by + c$

basta imporre:

1) la coincidenza della equazione dell'asse della parabola con la retta $y = -1/4$,
2) l'appartenenza del punto A alla parabola e
3)l'appartenenza del punto B.

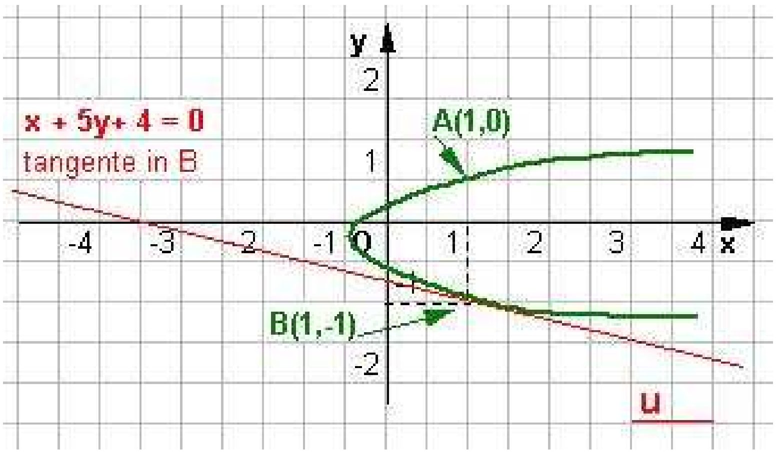
Si ottengono le tre equazioni ,

$$\begin{cases} c = 3 \\ a-b+c = 4 \\ -b/2a = -1/4 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.
Dunque l'equazione della parabola è : $x = 2y^2 + y + 3$

Problema 6

Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse x, passante per A(1; 0) , per B(1;–1) e ivi tangente alla retta x + 5y + 4 = 0.



Considerata l'equazione della parabola

$x = ay^2 + by + c$

basta imporre :

1)l'appartenenza del punto A alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B e
3)la condizione di tangenza tra la parabola e la retta $x + 5y + 4 = 0$.

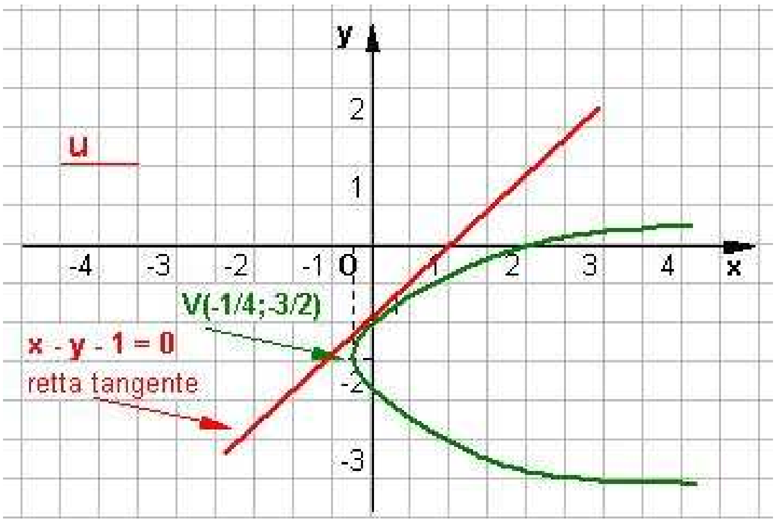
Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} c = 1 \\ a - b + c = 1 \\ (b + 5)^2 - 4a(c - 4) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 5$, $b = 5$, $c = 1$.
Dunque l'equazione della parabola è: $x = 5y^2 + 5y + 1$

Problema 7

Determinare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle x, avente il vertice in V (–1/4 ; –3/2) e tangente alla retta di equazione x – y – 1 = 0 .



Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2 + by + c$$

basta imporre:
1)l'appartenenza del vertice V alla parabola,
2)che l'ascissa generica del vertice $-b/2a$ sia uguale a $-1/4$ e
3)la condizione di tangenza tra la parabola e la retta $x - y - 1 = 0$.

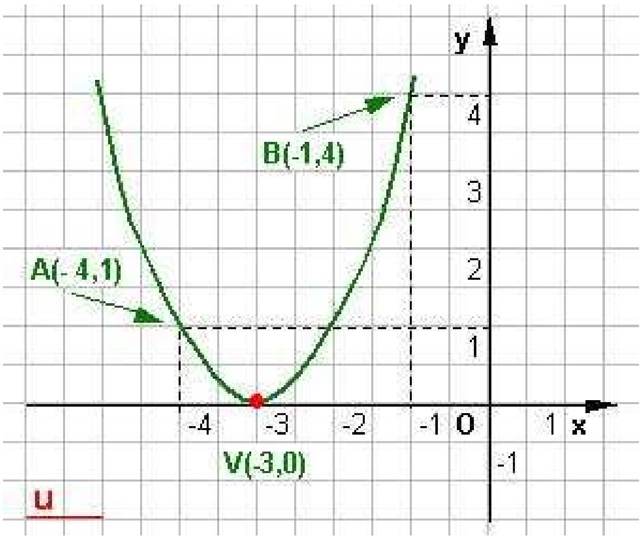
Si ottengono le tre equazioni

$$\begin{cases} -1/4 = 9/4a - 3/2b + c \\ -b/2a = -1/4 \\ (b-1)^2 - 4a(c-1) = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$.
Dunque l'equazione della parabola è $x = y^2 + y + 2$

Problema 8

Determinare l'equazione della parabola passante per A (–4 ; 1), per B (–1 ; 4) e avente vertice V (–3 ; 0) .



Considerata l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c$$

basta imporre:
1)l'appartenenza del punto A alla parabola,
2)l'appartenenza del punto B e
3)l'appartenenza del vertice V.

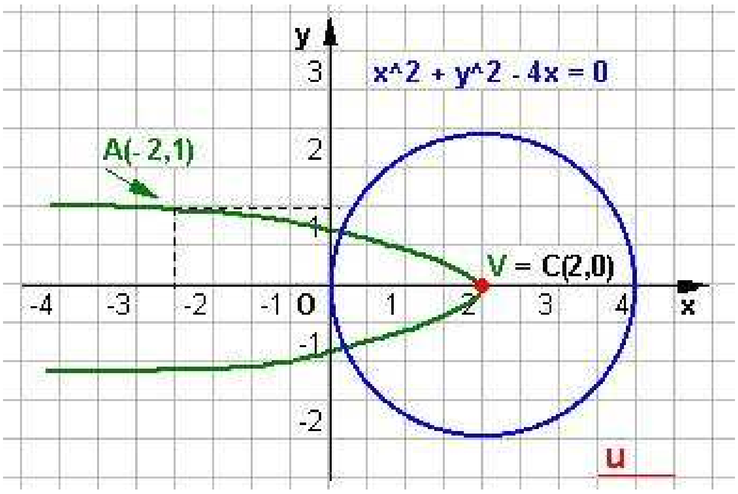
Si ottengono le tre equazioni :

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = 1 \\ a - b + c = 4 \\ 9a - 3b + c = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste tre equazioni si ottengono i valori $a = 1$, $b = 6$, $c = 9$.
Dunque l'equazione della parabola è : $y = x^2 + 6x + 9$

Problema 9

Determinare l'equazione della parabola con asse coincidente con l'asse x, avente il vertice nel centro della circonferenza di equazione $x^2+y^2-4x=0$ e passante per A(–2;1).



Essendo il vertice sull'asse x, si ha $-b/2a = 0$ da cui $b = 0$.

Considerata l'equazione della parabola

$$x = ay^2+c$$

basta imporre:
1) l'appartenenza del centro della circonferenza C (2 ; 0) alla parabola e
2) il passaggio per il punto A .

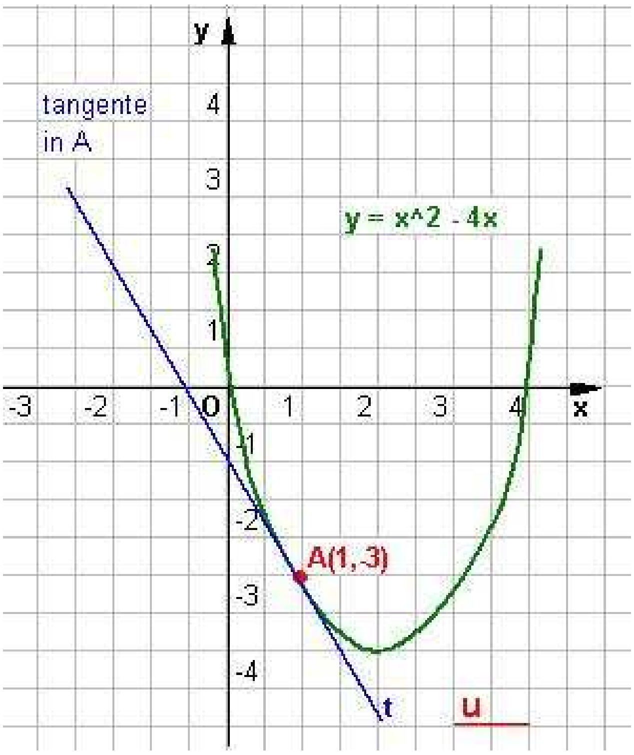
Si ottengono le due equazioni:

$$\begin{cases} c = 2 \\ -2 = a + c \end{cases}$$

Risolvendo il sistema formato da queste equazioni si ottengono i valori $a = -4$, $c = 2$.
Dunque l'equazione della parabola è : $x = -4y^2 + 2$

Problema 10

Determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola di equazione $y = x^2 - 4x$ nel punto A(1; –3)



Si scrive l'equazione

$$y +3 = m(x - 1)$$

del fascio proprio di rette di centro A.

Si mettono a sistema l'equazione della parabola e l'equazione del fascio e si impone la condizione di tangenza **Δ = 0**.
Si ottiene

$$(4+m)2- 4(m+3) = 0 , \quad \text{cioè}$$

$$m^2 + 4m + 4 = 0 \quad \text{da cui} \quad m = -2.$$

Sostituendo tale valore al posto di m nell'equazione del fascio si ottiene

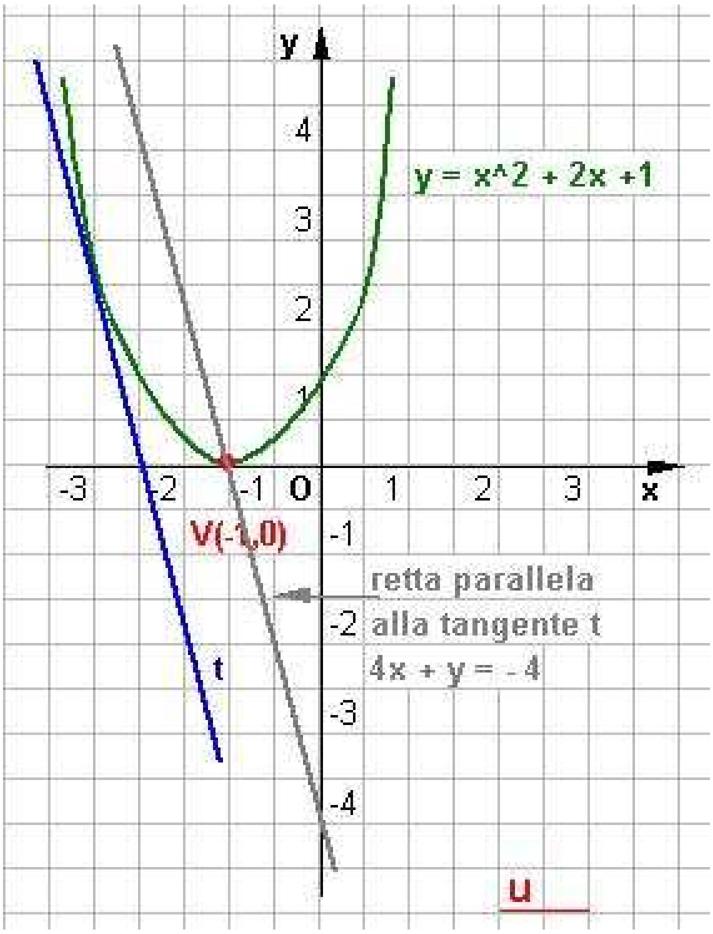
$$y + 3 = - 2(x - 1).$$

Dunque l'equazione della retta è

$$2x + y +1= 0.$$

Problema 11

Determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola $y = x^2 + 2x + 1$ e parallela alla retta $4x + y + 4 = 0$.



Si scrive l'equazione

$$4x + y + k = 0$$

del fascio improprio di rette parallele a

$$4x + y + 4 = 0.$$

Si mettono a sistema l'equazione della parabola e l'equazione del fascio e si impone la condizione di tangenza **Δ = 0**.

Si ottiene

$8 - k = 0$ da cu i $k = 8$.

Sostituendo tale valore al posto di k nell'equazione del fascio si ottiene l'equazione della retta cercata:

$$4x + y + 8 = 0.$$

Problema 12

Trovare l'equazione della parabola avente per vertice V(2,4) e per fuoco F(2,3).

L'equazione generica di una parabola ha espressione $y = ax^2 + bx + c$ abbiamo quindi necessità di avere tre equazioni in tre incognite per ottenere i tre parametri a, b, c sfrutteremo le coordinate del vertice e del fuoco ottenendo le tre equazioni cercate :

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \text{ e } F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$$

Quindi nel nostro caso :

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = 4 \\ \dfrac{1-\Delta}{4a} = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = 4 \\ \dfrac{1-\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 4a \\ -b^2 + 4ac = 16a \\ 1 - b^2 + 4ac = 12a \end{cases}$$

$$-1 \begin{cases} b = -4a \\ -16a^2 + 4ac - 16a = 0 \\ -16a^2 + 4ac - 12a + 1 = 0 \end{cases}$$

$$// \quad // \quad 4a \; + 1 = 0$$

$$\begin{cases} 4a = -1 \\ b = -4a \\ -16a^2 + 4ac - 16a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = -4(-1/4) = 1 \\ -16(1/16) + 4(-1/4)c - 16(-1/4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1 \\ -16(1/16) + 4(-1/4)c - 16(-1/4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1 \\ -1 - c + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1/4 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}$$

da cui l'equazione della parabola

$$\mathbf{y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3}$$

Problema 13

Trovare l'equazione della parabola avente per fuoco F(2,2) e per direttrice x = – 1.

Come il caso precedente sfrutteremo le espressioni della coordinata del fuoco e della direttrice, notando però che $x = -1$ è perpendicolare all'asse della parabola di equazione $y = -\frac{b}{2a}$, se ne deduce che l'equazione generica della parabola ha espressione $x = ay^2 + by + c$.

$$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right) \quad \text{eq. direttrice} \quad x = -\frac{1+\Delta}{4a}$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \\ -\frac{1+\Delta}{4a} = -1 \\ \frac{1-\Delta}{4a} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 4a \\ 1+\Delta = 4a \\ 1-\Delta = 8a \end{cases}$$

$$2 \; // \; = 12a$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -4(1/6) = -2/3 \\ 1+\Delta = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ b^2 - 4ac = 4a - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ \end{cases}$$

$-6c = -7$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ -2c/3 = 2/3 - 1 - 4/9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ -\dfrac{6}{9}c = \dfrac{-4+6-9}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ 4/9 - 2c/3 = 2/3 - 1 \\ \end{cases}$$

$b = -2/3$

$$\begin{cases} a = 1/6 \\ b = -2/3 \\ c = 7/6 \end{cases}$$

da cui l'equazione della parabola

$$x = \frac{1}{6}y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{7}{6}$$

Problema 14

Trovare le intersezioni della retta y = x + 4 con la parabola y = – x² + 6x.

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x^2 + 6x \end{cases}$$

elaboriamo la seconda dopo la sostituzione :

$x + 4 = -x^2 + 6x$

$x^2 - 6x + x + 4 = 0$

$x^2 - 5x + 4 = 0$

$$x_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} =$$

$x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = x_1 + 4 = 1 + 4 = 5$ **A (1,5)**

$x_2 = 4 \Rightarrow y_2 = x_2 + 4 = 4 + 4 = 8$ **B (4,8)**

Problema 15

Trovare per quali valori di m la retta y = mx è tangente alla parabola y = x² – 6x + 8.

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x^2 - 6x + 8 \end{cases}$$

$mx = x^2 - 6x + 8$

$x^2 - x(6 + m) + 8 = 0$

la condizione di tangenza è

$\Delta = 0 \quad b^2 - 4ac = 0$

$(6 + m)^2 - 32 = 0$

$36 + 12m + m^2 - 32 = 0$

$m^2 + 12m + 4 = 0$

$$m_{12} = -6 \pm \sqrt{36-4} = -6 \pm \sqrt{32} = -6 \pm 4\sqrt{2}$$

da cui le equazioni delle tangenti

$$y = \left(-6 - 4\sqrt{2}\right)x \quad \text{e} \quad y = \left(-6 + 4\sqrt{2}\right)x$$

Problema 16

Data la parabola y = 3x² – 2x + 1, determinare per quale valore di m la retta y = mx – 1 è tangente ad essa ; determinare anche il punto di contatto.

$$\begin{cases} y = mx + 1 \\ y = 3x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$mx + 1 = 3x^2 - 2x + 1$

$3x^2 - 2x - mx = 0$

$3x^2 - x(2 + m) = 0$ **(*)**

la condizione di tangenza è

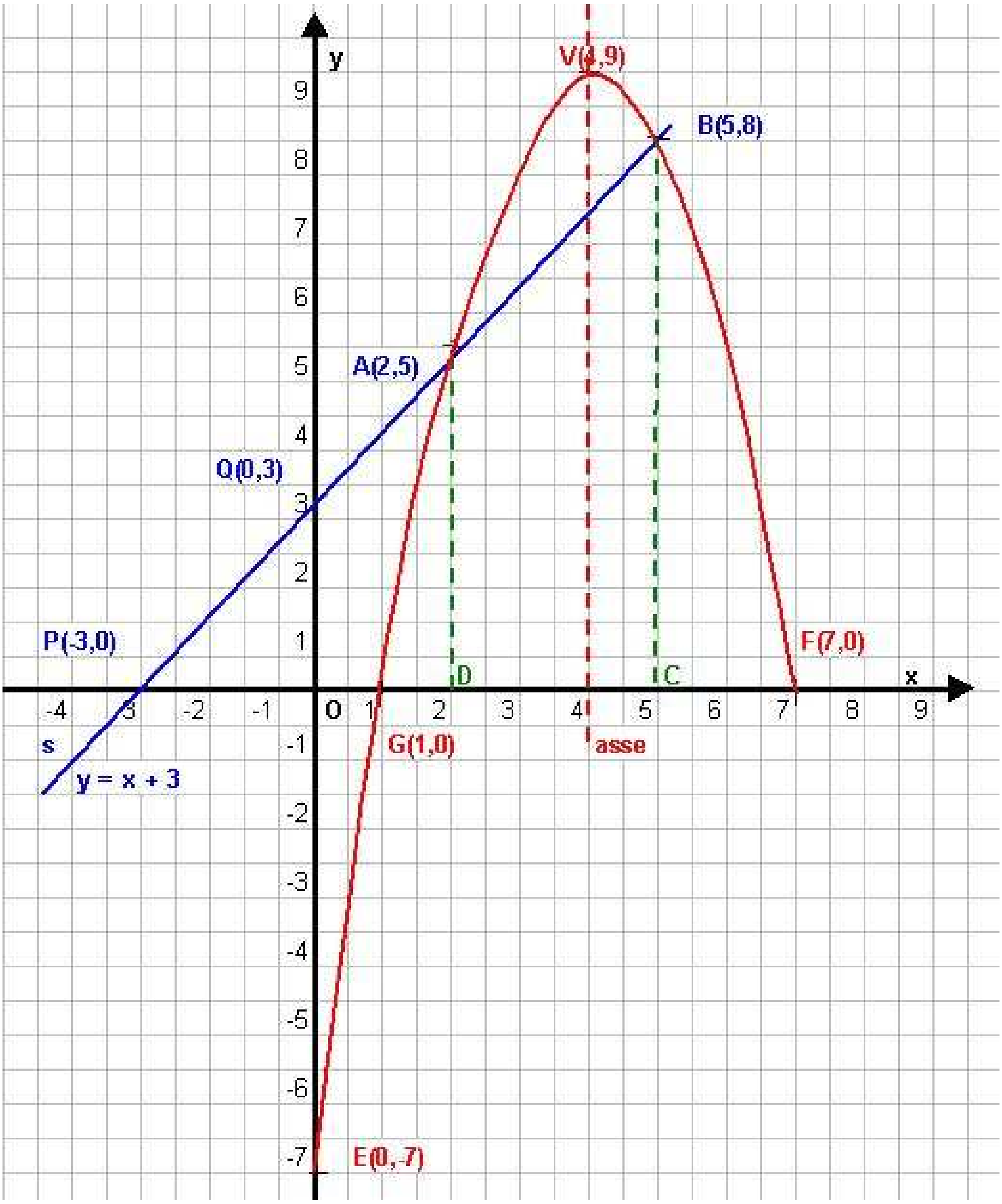
$\Delta = 0 \quad b^2 - 4ac = 0$

$(2 + m)^2 = 0$

$m_{12} = -2$
la retta tangente ha espressione $y = -2x + 1$
Dalla **(*)** se $m = -2 \quad x = 0 \Rightarrow y = -2 \bullet 0 + 1 = 1$
Da cui il punto di contatto ha coordinate
T (0,1)

Problema 17

Una parabola con l'asse parallelo all'asse delle y, passa per il punto G(1,0) ed ha il vertice V nel punto (4,9).Scriverne l'equazione e rappresentarla. La retta passante per (0,3), e di coefficiente angolare 1, interseca detta parabola in A e B. Da A e B si conducono le perpendicolari all'asse delle x che intersecano l'asse stesso in D e C. Calcolare la misura del perimetro e l'area del quadrilatero ABCD.



Riassumiamo per impostare il sistema risolvente in a, b e c:

passa per G(1,0) ; con $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (4,9)$ ed è del tipo $y = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 4 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ -b = 8a \\ -\Delta = 36a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8a \\ a - 8a + c = 0 \\ -b^2 + 4ac = 36a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8a \\ 7a = c \\ -(-8a)^2 + 4a(7a) = 36a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8a \\ c = 7a \\ 36a(a + 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8a \\ c = 7a \\ -64a^2 + 28a^2 - 36a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -8a \\ c = 7a \\ 36a^2 + 36a = 0 \end{cases}$$

se a = 0, b = 0, c = 0
nessuna parabola

se a = – 1, b = 8, c = – 7
parabola di equazione
$\mathbf{y = -x^2 + 8x - 7}$
Concavità verso il basso a < 0

asse $x = -\frac{b}{2a} = 4$

Rappresentiamola determinandone altri punti :

se x = 0 y = – 7 $\Rightarrow$ **E (0, – 7)**

se y = 0 $-x^2 + 8x - 7 = 0 \Rightarrow x_{12} = 4 \pm \sqrt{16 - 7} = 4 \pm 3 =$

$x_1 = 1 \Rightarrow$ **G(1,0)**

$x_2 = 7 \Rightarrow$ **F(7,0)**

Determiniamo ora la retta **s** passante per il punto **Q(0,3)** e di coefficiente angolare m = 1.

$y - y_1 = m(x - x_1)$ quindi

$y - 3 = x$ per tracciarla oltre al punto Q poniamo y = 0 da cui x = –3 $\Rightarrow$ **P (–3,0)**

Quindi dal sistema con la parabola si troveranno i punti **A** e **B** di intersezione con la parabola.

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = -x^2 + 8x - 7 \end{cases}$$ sostituiamo la prima nella seconda elaborando quest'ultima

$x + 3 = -x^2 + 8x - 7$
$x^2 - 8x + x + 3 + 7 = 0$
$x^2 - 7x + 10 = 0$

$$x_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} =$$

$x_1 = 2 \quad y_1 = 5 \Rightarrow$ **A(2,5)**

$x_2 = 5 \quad y_2 = 8 \Rightarrow$ **B(5,8)**

Calcoliamo il perimetro del quadrilatero ABCD (trapezio rettangolo) :
AH = DC = OC – OD = $x_C - x_D = 5 - 2 = 3$
BH = CB – AD = $y_B - y_A = 8 - 5 = 3$
$$AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

2p = AD + DC + BC + AB = $5 + 3 + 8 + 3\sqrt{2} = 16 + 3\sqrt{2}$

e infine l'area

$$As = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(8+5)3}{2} = \frac{39}{2}$$

Problema 18

Quante soluzioni ha il problema ?
Trovare i coefficienti a, b e c dell'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, sapendo che passa per A(–1,1) e B(2,1) ed è tangente alla retta $y = x + 3$.

Dai dati del problema si deduce che le condizioni per impostare un sistema di tre equazioni in tre incognite ci sono tutte, passaggio per due punti e condizione di tangenza:

partiamo da quest'ultima e determiniamola

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

sostituiamo la prima nella seconda

elaborando quest'ultima
$ax^2 + bx + c = x + 3$
$ax^2 + x(b-1) + c - 3 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \quad \Rightarrow \quad (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0$

Da cui il sistema
$$\begin{cases} a - b + c = 1 & \text{passaggio per il punto A}(-1,1) \\ 4a + 2b + c = 1 & \text{passaggio per il punto B}(2,1) \\ (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 & \text{condizione di tangenza} \end{cases}$$

elaboriamo le prime due

$$\begin{array}{r|l} & (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 \\ -1 & -a + b - c = -1 \\ & 4a + 2b + c = 1 \\ \hline & 3a + 3b \; // \; = 0 \end{array}$$

a = – b questo ci permette di ridurre il sistema dato all'equivalente

$$\begin{cases} (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 \\ a - b + c = 1 \\ a = -b \end{cases}$$

sostituiamo la terza nella seconda ricavando il valore di c in funzione di b, indi sostituiremo il tutto nella prima elaborando quest'ultima

$$\begin{cases} a = -b \\ -b - b + c = 1 \\ (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -b \\ c = 2b + 1 \\ (b-1)^2 - 4a(c-3) = 0 \end{cases}$$

$(b-1)^2 - 4(-b)\,((2b+1) - 3) = 0$
$(b-1)^2 + 4b\,(2b+1-3) = 0$
$b^2 + 1 - 2b + 4b\,(2b-2) = 0$
$b^2 + 1 - 2b + 8b^2 - 8b = 0$
$9b^2 - 10b + 1 = 0$

$$b_{12} = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{9} = \frac{5 \pm 4}{9} = \begin{cases} b_1 = 1/9 \\ b_2 = 1 \end{cases}$$

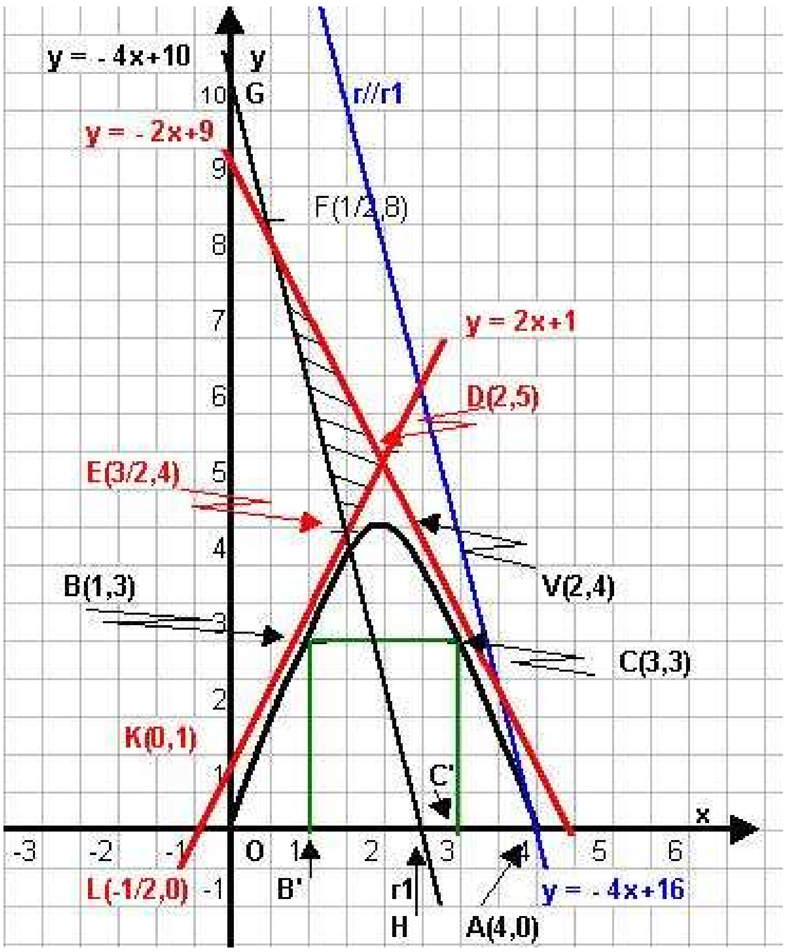
Il sistema ammette due soluzioni questo comporta che il problema ammette l'espressione di due parabole, rispettivamente

se $\begin{cases} b = 1/9 \\ a = -1/9 \\ c = 2b + 1 = 2(1/9) + 1 = 11/9 \end{cases} \Rightarrow y = -1/9x^2 + 1/9x + 11/9$
$9y = -x^2 + x + 11$

se $\begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \\ c = 2 + 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow y = -x^2 + x + 3$

Problema 19

Scrivere l'equazione della parabola avente per asse di simmetria la retta x = 2 e tangente nel punto A (4,0) ad una retta r parallela ad r_1 di equazione 4x + y – 10 = 0.
Inscrivere un rettangolo nella parte di piano limitata dell'arco di parabola giacente nel I° quadrante e calcolare le coordinate dei vertici B e C del rettangolo che stanno sulla parabola, conoscendo la lunghezza 2p = 10 del perimetro del rettangolo. Scrivere le equazioni delle rette tangenti in B e C alla parabola e calcolare l'area del triangolo da essa formato con la retta r_1.



Prima parte del problema.
Prima relazione per det. l'eq. della parabola:
a) ricerca della retta r parallela ad r_1 di eq.

$$4x + y - 10 = 0$$

r_1

	x	y
G	0	10
H	5/2	0

$m = -\dfrac{a}{b} = \dfrac{-4}{1} = -4$

passante per A(4,0)

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ quindi

$y - 0 = -4\,(x - 4)$
$y = -4x + 16$

Condizione di tangenza con la parabola
$y = ax^2 + bx + c$

da cui

$$\begin{cases} y = -4x + 16 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$

$ax^2 + bx + c = -4x + 16$
$ax^2 + bx + c + 4x - 16 = 0$
$ax^2 + x(b + 4) + c - 16 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (b + 4)^2 - 4a(c - 16) = 0$

I^ eq. del sistema risolvente per i coefficienti della parabola

b) la seconda equazione è data dall'asse: $-\dfrac{b}{2a} = 2$

c) l'imposizione del passaggio per il punto A(4,0) : $16a + 4b + c = 0$

Il sistema avrà espressione

$$\begin{cases} (b + 4)^2 - 4a(c - 16) = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ 16a - 16a + c = 0 \\ (4 - 4a)^2 - 4a(0 - 16) = 0 \end{cases}$$

elaboriamo l'ultima

$16 + 16a^2 - 32a + 64a = 0$
$16a^2 + 32a + 16 = 0$
$a^2 + 2a + 1 = 0$
$(a + 1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{eq. parabola } \mathbf{y = -x^2 + 4x}$$

La parabola passa per l'origine, per il punto A dato e ha per vertice

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(2, \frac{-16}{-4}\right) = (2,4)$$

Seconda parte del problema

Il rettangolo BCB'C' dove B'C' non riportati in figura, sono le proiezioni ortogonali dei punti B e C sull'asse delle ascisse x; i punti avranno coordinate generiche $B(x_B,Y)$ e $C(x_C,y)$ da cui le relazioni facilmente intuibili
$BC = B'C' = x_C - x_B = b$ (*)
$BB' = CC' = y - 0 = a$
con a e b misure generiche dei lati del rettangolo, e tenendo presente la relazione del perimetro abbiamo:
$2p = 2a + 2b = 10$ cioè
a + b = 5
inoltre dalla relazione delle coordinate per il punto medio sappiamo che deve coincidere con l'asse:

$$\frac{x_C + x_B}{2} = 2$$

$x_C + x_B = 4$

questa relazione con la (*) costituisce la relazione da inserire nel sistema risolvente cioè

$$\begin{cases} x_C + x_B = 4 \\ \underline{x_C - x_B = b} \end{cases}$$
$$\mathbf{2x_C \quad // \quad = 4 + b}$$

infine le coordinate dei punti soddisfano l'equazione della parabola, appartenendovi e abbiamo il sistema con x_C generico per ottenere sia B che C:

$$\begin{cases} y = -x_C^2 + 4x_C = a \\ a + b = 5 \\ 2x_C = b + 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 - b \\ x_C = \dfrac{b+4}{2} \\ -x_C^2 + 4x_C - a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} +x_C^2 - 4x_C + (5 - b) = 0 \\ a = 5 - b \\ x_C = \dfrac{b+4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 - b \\ x_C = \dfrac{b+4}{2} \\ \left(\dfrac{b+4}{2}\right)^2 - 4\left(\dfrac{b+4}{2}\right) + (5-b) = 0 \end{cases}$$

elaboriamo solo l'ultima
$(b+4)^2 - 8(b+4) + 4(5 - b) = 0$
$b^2 + 8b + 16 - 8b - 32 + 20 - 4b = 0$
$b^2 - 4b + 4 = 0$
$(b - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{b = 2}$

di conseguenza
$\mathbf{a = 5 - b = 5 - 2 = 3}$

e dalla I^ equaz del sistema si ha
$x_C^2 - 4x_C + a = 0$
$x_C^2 - 4x_C + 3 = 0$

$$x_{C12} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$$

$x_1 = 1 \quad \Rightarrow$ **B (1, 3)** e **B'(1,0)**

$x_2 = 3 \quad \Rightarrow$ **C (3, 3)** e **C'(3, 0)**

Terza parte del problema

Le equazioni delle tang. in B e C hanno espressione generica: $y - y_1 = m(x - x_1)$
E dalla cond. $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ con la parabola avremo il valore del coefficiente angolare.

Considerando il punto **B (1, 3)** abbiamo

$$\begin{cases} y - 3 = m(x - 1) \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m(x - 1) + 3 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m(x - 1) + 3 \\ m(x - 1) + 3 = -x^2 + 4x \end{cases}$$

elaboriamo solo l'ultima
$mx - m + 3 + x^2 - 4x = 0$
$x^2 - x(4 - m) - m + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4 - m)^2 - 4(3 - m) = 0$

$16 + m^2 - 8m - 12 + 4m = 0$
$m^2 - 4m + 4 = 0$
$(m - 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m = 2}$
eq retta tangente

$y - 3 = 2(x - 1)$
$y - 3 = 2x - 2$
$\mathbf{y = 2x + 1}$

Considerando il punto **C (3, 3)** abbiamo

$$\begin{cases} y - 3 = m(x - 3) \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m(x - 3) + 3 \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m(x - 3) + 3 \\ m(x - 3) + 3 = -x^2 + 4x \end{cases}$$

elaboriamo solo l'ultima

$mx - 3m + 3 + x^2 - 4x = 0$
$x^2 - x(4 - m) - 3(m - 1) = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (4 - m)^2 + 12(m - 1) = 0$
$16 + m^2 - 8m + 12m - 12 = 0$
$m^2 + 4m + 4 = 0$
$(m + 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{m = -2}$
eq retta tangente
$y - 3 = -2(x - 3)$
$y - 3 = -2x + 6$
$\mathbf{y = -2x + 9}$

Cerchiamo ora i punti d'intersezione tra le due tangenti alla parabola:

$$\begin{cases} y + 2x - 9 = 0 \\ y - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$
$2y \quad // \quad - 10 = 0$

$y = \frac{10}{2} = 5$ e per la II^ eq del sistema
$5 - 2x - 1 = 0$
$-2x = -4$
$x = 2 \quad \Rightarrow \quad$ **D (2,5)**

Cerchiamo ora il punto d'intersezione tra r_1 e la tangente alla parabola in B (1, 3):

$$\begin{cases} y + 4x - 10 = 0 \\ y - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$2\begin{cases} y + 4x - 10 = 0 \\ 2y - 4x - 2 = 0 \end{cases}$$
$3y \quad // \quad -12 = 0$

$y = \frac{12}{3} = 4$

$$-1\begin{cases} y + 4x - 10 = 0 \\ -y + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$
$// \quad 6x - 9 = 0$

$x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow$ **E (3/2 ;4)**

Cerchiamo ora il punto d'intersezione tra r_1 e la tangente alla parabola in C (3, 3):

$$\begin{cases} y + 4x - 10 = 0 \\ y + 2x - 9 = 0 \end{cases}$$

$$-2\begin{cases} y + 4x - 10 = 0 \\ -2y - 4x + 18 = 0 \end{cases}$$
$-y \quad // \quad + 8 = 0$
$y = 8$

$$-1\begin{cases} y + 4x - 10 = 0 \\ -y - 2x + 9 = 0 \end{cases}$$
$// \quad 2x - 1 = 0$

$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$ **F (1/2 ;8)**

Calcoliamo ora l'area del triangolo FED:
I° modo) con Sarrus:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 5 \\ \frac{3}{2} & 4 & 1 & \frac{3}{2} & 4 \\ \frac{1}{2} & 8 & 1 & \frac{1}{2} & 8 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left[8+\frac{5}{2}+\frac{24}{2}-\left(2+16+\frac{15}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{16+5+24}{2}\right)-\left(\frac{4+32+15}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{45}{2}-\frac{51}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{6}{2}\right) = \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$$

II° modo) Calcolando la distanza d della retta r_1 dal punto D (altezza):

r_1) $4x + y - 10 = 0$ D (2,5)

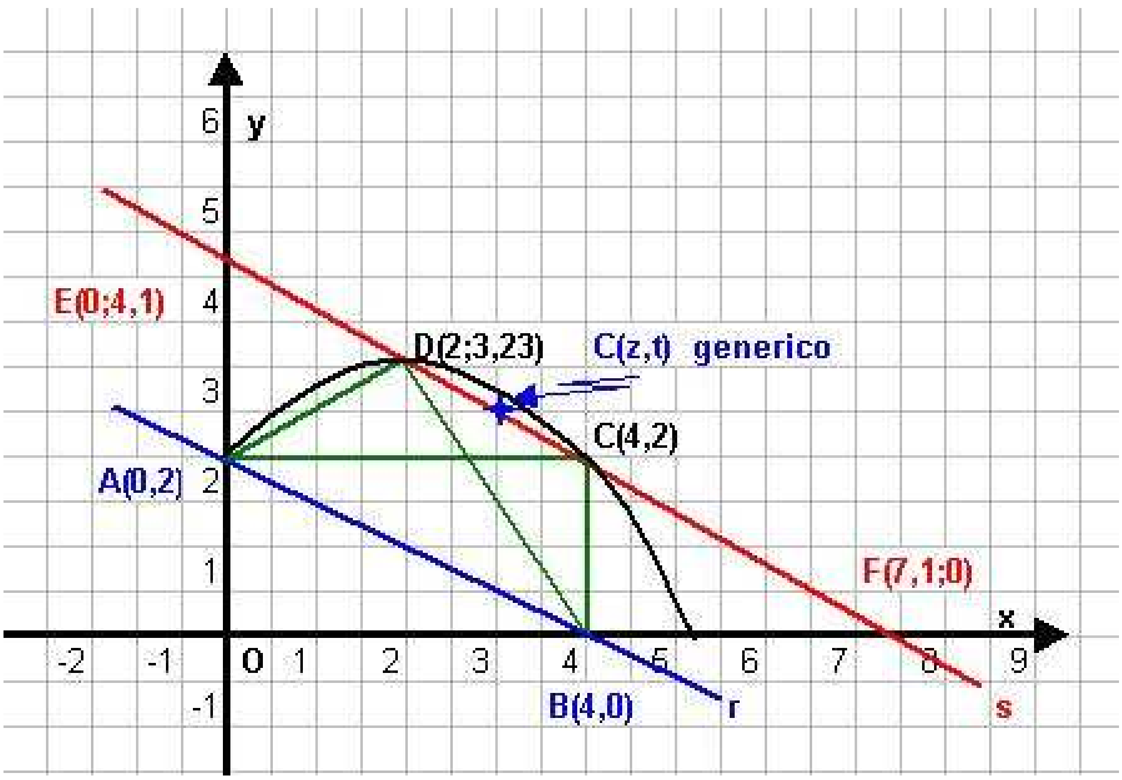
$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right| = \left|\frac{4 \bullet 2 + 1 \bullet 5 - 10}{\sqrt{16+1}}\right| = \left|\frac{8+5-10}{\sqrt{17}}\right| = \left|\frac{3}{\sqrt{17}}\right|$$

$$l(\text{base}) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + (4-8)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$As = \frac{l \bullet d}{2} = \frac{\sqrt{17} \bullet \frac{3}{\sqrt{17}}}{2} = \frac{3}{2}$$

Problema 20

Nel piano cartesiano Oxy sono date le rette r) x + 2y – 4 = 0 ed s) x(√5 – 1) + 2y – 4√5 = 0. Detti A e B i punti in cui la retta r incontra gli assi, si determinino le coordinate dei punti C e D che appartengono alla retta s e che con A e B formano triangoli rettangoli di cui AB è l'ipotenusa. Determinare infine l'equazione di una parabola, con asse parallelo all'asse y, tale da avere il vertice in uno dei punti A,B,C,D, opportunamente scelto e che passi per due degli altri punti.



Data la retta **r**) $x + 2y - 4 = 0$ rappresentiamola

r

	x	y
A	0	2
B	4	0

Data la retta **s**) $x(\sqrt{5} - 1) + 2y - 4\sqrt{5} = 0$ rappresentiamola

s

	x	y
E	0	$2\sqrt{5}$
F	$5+\sqrt{5}$	0

In base ai dati del testo, la relazione fondamentale che lega le grandezze è il teor. di Pitagora:

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ ed evidenziando gli addendi

$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 2^2 + 4^2 = 4 + 16 = 20$

$AC^2 = (x_1 - 0)^2 + (y_1 - 2)^2 = x_1^2 + (y_1 - 2)^2$

$BC^2 = (4 - x_1)^2 + (0 - y_1)^2 = (4 - x_1)^2 + y_1^2$

Da cui la prima relazione del sistema risolvente

$x_1^2 + (y_1 - 2)^2 + (4 - x_1)^2 + y_1^2 = 20$

La seconda relazione ci è data dal fatto che il punto generico C_1 (x_1,y_1) deve appartenere alla retta **s**), cioè soddisfare la sua equazione, cioè : $x_1(\sqrt{5} - 1) + 2y_1 - 4\sqrt{5} = 0$.

Unendo le due espressioni così trovate nel sistema di due equazioni in due incognite avremo il sistema risolvente:

$$\begin{cases} x_1^2 + (y_1 - 2)^2 + (4 - x_1)^2 + y_1^2 = 20 \\ x_1(\sqrt{5} - 1) + 2y_1 - 4\sqrt{5} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1^2 + 2y_1^2 - 4y_1 - 8x_1 = 0 \\ x_1(\sqrt{5} - 1) + 2y_1 - 4\sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 - 4y_1 + 4 + 16 - 8x_1 + x_1^2 + y_1^2 = 20 \\ x_1(\sqrt{5} - 1) + 2y_1 - 4\sqrt{5} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = (4\sqrt{5} - x_1(\sqrt{5} - 1)) /2 \\ x_1^2 + y_1^2 - 2y_1 - 4x_1 = 0 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda equazione dopo la sostituzione :

$$x_1^2 + \left[\frac{4\sqrt{5} - x_1\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}\right]^2 - 2\left[\frac{4\sqrt{5} - x_1\left(\sqrt{5} - 1\right)}{2}\right] - 4x_1 = 0 \quad \text{poniamo } x_1 = t$$

$$4t^2 + 80 + t^2(\sqrt{5} - 1)^2 - 8t\sqrt{5}\,(\sqrt{5} - 1) - 4\,(4\sqrt{5} - t\sqrt{5} + t) - 16t = 0$$

$4t^2 + 80 + t^2(5 + 1 - 2\sqrt{5}) - 40t + 8t\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 4t\sqrt{5} - 4t - 16t = 0$

$4t^2 + 80 + 6t^2 - 2t^2\sqrt{5} - 40t + 8t\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 4t\sqrt{5} - 20t = 0$

$10t^2 - 2t^2\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 80 - 60t + 12t\sqrt{5} = 0$

$2t^2(5 - \sqrt{5}) + 12t(5 - \sqrt{5}) + 16(5 - \sqrt{5}) = 0$

$2t^2 + 12t + 16 = 0$

$t^2 + 6t + 8 = 0$

$$t_{12} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \quad \begin{cases} t_1 = 2 & \Rightarrow x_1 = 2 \\ t_2 = 4 & \Rightarrow x_1 = 4 \end{cases}$$

Quindi esistono due condizioni per il punto C soddisfacenti quanto richiesto:

per $x_1 = 2$ $\quad y_1 = \dfrac{4\sqrt{5} - 2(\sqrt{5} - 1)}{2} = \dfrac{4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} + 2}{2} = \dfrac{2\sqrt{5} + 2}{2} = \sqrt{5} + 1$

per $x_1 = 4$ $\quad y_1 = \dfrac{4\sqrt{5} - 4(\sqrt{5} - 1)}{2} = \dfrac{4\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 4}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

Ne consegue che i punti cercati sono : **D (2 ; $\sqrt{5} + 1$)** **C (4 ; 2)**

Seconda parte del problema

L'equazione dell'asse di una parabola parallelo all'asse y ha espressione x = –b/2a.
Dalla fig. si nota che l'ascissa di D è posta a metà dei punto A e C è lecito supporre che il valore dell'asse sia "2" e l'equazione della parabola sarà del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con vertice in D.
Quindi:

$$\begin{matrix}\text{asse} \\ y(D) \\ y(A)\end{matrix} \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = \sqrt{5} + 1 \\ 2 = 0 + 0 + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 2 \\ 4a + 2(-4a) + 2 = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 2 \\ 4a - 8a + 2 = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 2 \\ -4a + 2 = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 2 \\ -4a = \sqrt{5} + 1 - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ b = -4\left(\dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}\right) \\ c = 2 \end{cases}$$

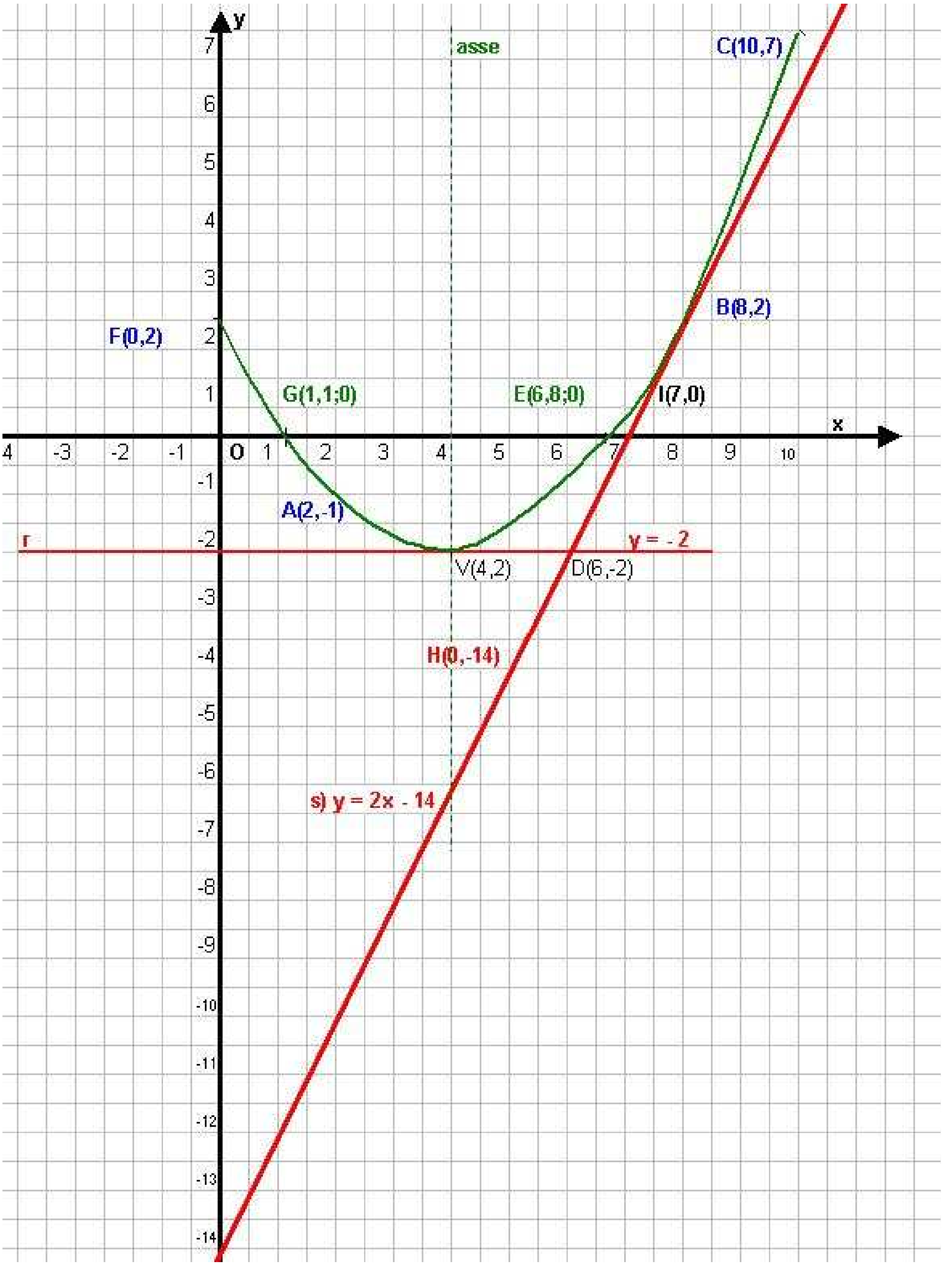
$$\begin{cases} a = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} \\ b = \sqrt{5} - 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Da cui l'equazione della parabola è : $y = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}x^2 + (\sqrt{5} - 1)x + 2$

Problema 21

Si consideri la parabola con asse parallelo all'asse y, passante per i punti A(2, – 1) ; B(8,2) e C(10,7). Determinare :

1) **l'equazione della parabola ;**
2) **le coordinate del vertice**
3) **il grafico della parabola dopo averne determinato alcuni punti**
4) **le equazioni delle tangenti alla parabola, passanti per il punto D(6, – 2)**
5) **le coordinate dei punti di tangenza**
6) **l'area del triangolo che ha per vertici il punto D e i punti di tangenza.**



1) L'equazione della parabola sarà del tipo $y = ax^2 + bx + c$.
Ricerchiamo quindi i tre coefficienti a, b, c; le condizioni da imporre per risolvere il quesito sono il passaggio per i punti dati A(2, – 1) ; B(8,2) e C(10,7)ottenendo il sistema:

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \begin{cases} 4a + 2b + c = -1 \\ 64a + 8b + c = 2 \\ 100a + 10b + c = 7 \end{cases}$$

Sistema di tre eq. in tre incognite, lo risolviamo con : a) metodo di sostituzione; b) metodo di Kramer per verifica.
a)

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ 64a + 8b - 1 - 4a - 2b = 2 \\ 100a + 10b - 1 - 4a - 2b = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ 60a + 6b = 3 \\ 96a + 8b = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ 20a + 2b = 1 \\ 12a + b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ b = 1 - 12a \\ 20a + 2(1 - 12a) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ b = 1 - 12a \\ 20a + 2 - 24a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -1 - 4a - 2b \\ b = 1 - 12a \\ -4a = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 - 12(\frac{1}{4}) = -2 \\ c = -1 - 4(\frac{1}{4}) - 2(-2) = 2 \end{cases}$$

da cui l'eq. della parabola : $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$.

b)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 100 & 10 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 64 & 1 \\ 100 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 64 & 8 \\ 100 & 10 \end{vmatrix} =$$

$= 4(8-10) - 2(64-100) + (640-800) = -8 - 2(-36) - 160 = -8 + 72 - 160 = -96$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ 7 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & 10 \end{vmatrix} = -(8-10) - 2(2-7) + 1(20-56) = 2 + 10 - 36 = -24$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 64 & 2 & 1 \\ 100 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 64 & 1 \\ 100 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 64 & 2 \\ 100 & 7 \end{vmatrix} = 4(2–7)+1(64–100)+1(448–200)=$$

$$= –20 –36 +248 = 192$$

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 64 & 8 & 2 \\ 100 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 64 & 2 \\ 100 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 64 & 8 \\ 100 & 10 \end{vmatrix} = 4(56– 20)– 2(448– 200) – 1(640– 800)=$$

$$= 144 – 496 + 160 = 192$$

ne consegue:

$a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta} = \dfrac{-24}{-96} = \dfrac{1}{4}$ $\qquad$ $b = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} = \dfrac{192}{-96} = -2$ $\qquad$ $c = \dfrac{\Delta_c}{\Delta} = \dfrac{-192}{-96} = 2$

Ritrovando i coefficienti già determminati.

2)Vediamo ora di determinare punti notevoli della parabola e sue intersezioni per disegnarla:

$$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2\frac{1}{4}} = 2 \bullet 2 = 4$ (anche asse della parabola)

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\left(b^2 - 4ac\right)}{4a} = -\frac{4 - 4\frac{1}{4}2}{4\frac{1}{4}} = -2$$

V(4 ; – 2)

3) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - 2x + 2.$

Per x = 0 abbiamo y = 2 $\Rightarrow$ **F(0;2)**

Per y = 0 abbiamo $\dfrac{1}{4}x^2 – 2x + 2 = 0$

$x^2 – 8x + 8 = 0$

$x_{12} = 4 \pm \sqrt{8} = 4 \pm 2\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ **E (4 + 2$\sqrt{2}$; 0)** e **G (4 – 2$\sqrt{2}$; 0)**

4) Equazioni delle tangenti nel punto D (6 ; –2)

L'eq. generica della retta nel punto D ha espressione

$y – y_1 = m (x – x_1)$ quindi

$y + 2 = m (x – 6)$

mettiamola a sistema con l'eq. della parabola ed imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} y + 2 = m(x - 6) \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m(x - 6) - 2 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

sostituiamo ed elaboriamo quest'ultima

$m(x - 6) - 2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$

$\frac{1}{4}x^2 - 2x - mx + 6m + 2 + 2 = 0$

$\frac{1}{4}x^2 - x(2 + m) + 6m + 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2+m)^2 - 4\frac{1}{4}(6m+4) = 0$

$4 + 4m + m^2 - 6m - 4 = 0$

$m^2 - 2m = 0$

$m(m - 2) = 0 \quad \nearrow m = 0 \quad \searrow m = 2$

per m = 0 si ha la retta **r**) $y + 2 = 0$ **$y = -2$**

per m = 2 si ha la retta **s**) $y + 2 = 2(x - 6)$

$y = 2x - 12 - 2$

$y = 2x - 14$

s

	x	y
H	0	–14
I	7	0

5) Coordinate dei punti di tangenza

con la retta **r** (si ritroverà il vertice)

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 \\ y + 2 = 0 \end{cases}$$

$-2 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$

$\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4 = 0$

$x^2 - 8x + 16 = 0$

$(x - 4)^2 = 0$

$x = 4 \quad \Rightarrow$ C. V. D. **V(4 ; – 2)**

con la retta **s**

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2 \\ y = 2x - 14 \end{cases}$$

$2x - 14 = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 2$

$8x - 56 = x^2 - 8x + 8$

$x^2 - 16x + 64 = 0$

$(x - 8)^2 = 0$

$x = 8 \quad \Rightarrow \quad y = 16 - 14 = 2$ da cui

L = B(8 ; – 2)

6) Troviamo infine l’area del triangolo VDB:

I° modo)

VD = x_D - x_V = 6 – 4 = 2

BN = BM + MN = y_P + $|y_N|$ = 2 + 2 = 4

Ne consegue

As = B h / 2 = (VD)(BN)/2 = (2)(4)/2 = 4

II° modo) con la regola di Sarrus

Dati i punti V(4; –2) D(6 ; –2) e B (8;2) sussiste

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 y_2 1 + y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3\right) - \left(1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1\right)\right]$$

– – – + + +

Da cui nel nostro caso:

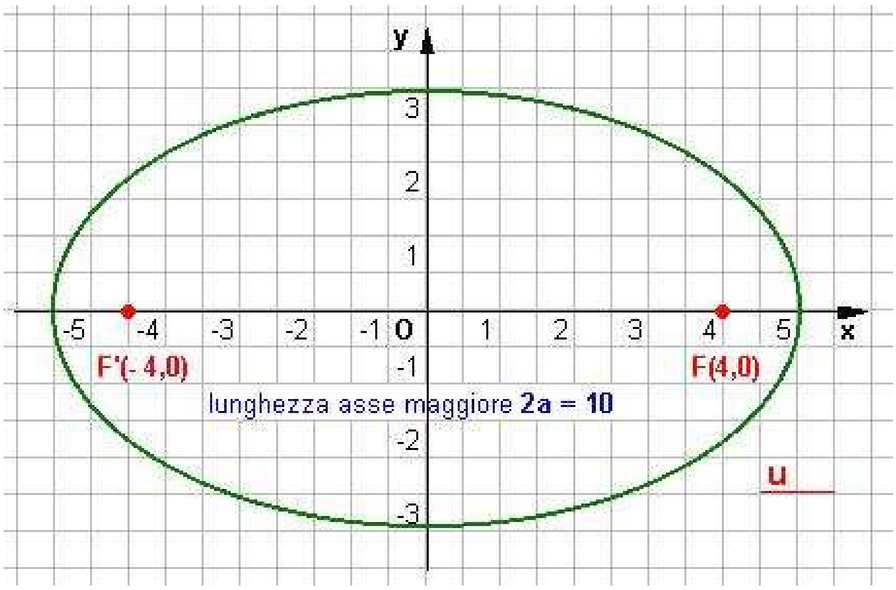
$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 4 & -2 & 1 & 4 & -2 \\ 6 & -2 & 1 & 6 & -2 \\ 8 & 2 & 1 & 8 & 2 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left[-8-16+12-\left(-16+8-12\right)\right] = \frac{1}{2}\left[-24+12-\left(-16-4\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-12-\left(-20\right)\right] = \frac{1}{2}\left[8\right] = 4$$

L'ELLISSI E LE SUE APPLICAZIONI

Problema 1

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x, avente asse maggiore di lunghezza 2a = 10 e fuochi nei punti F'(– 4 ; 0) ed F(4 ; 0).



Essendo 2a = 10 si ottiene a = 5 e quindi $a^2 = 25$.

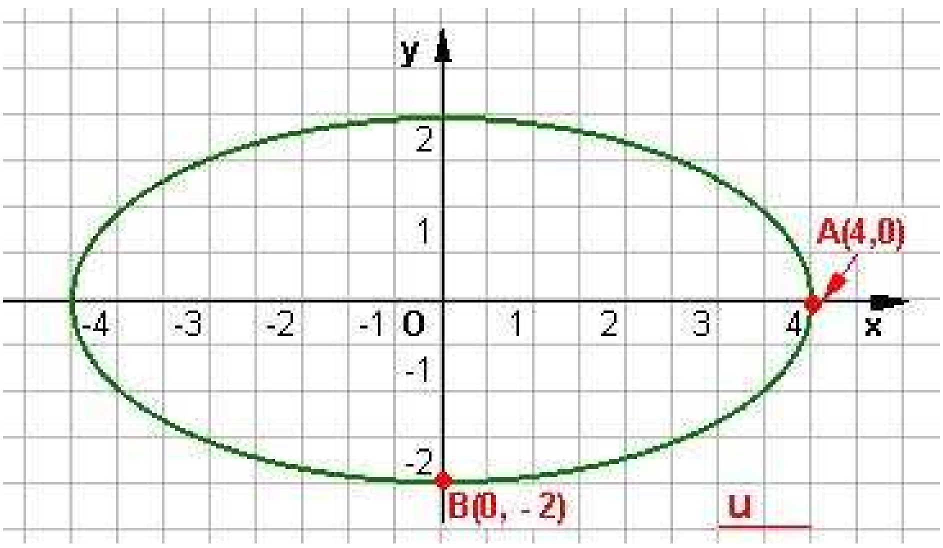
Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, poichè $c^2 = 16$, si ottiene $b^2 = 25 - 16 = 9$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è :

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Problema 2

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x, avente vertici nei punti A(4 ; 0) e B(0 ; – 2).



Essendo a = 4 si ottiene $a^2 = 16$.

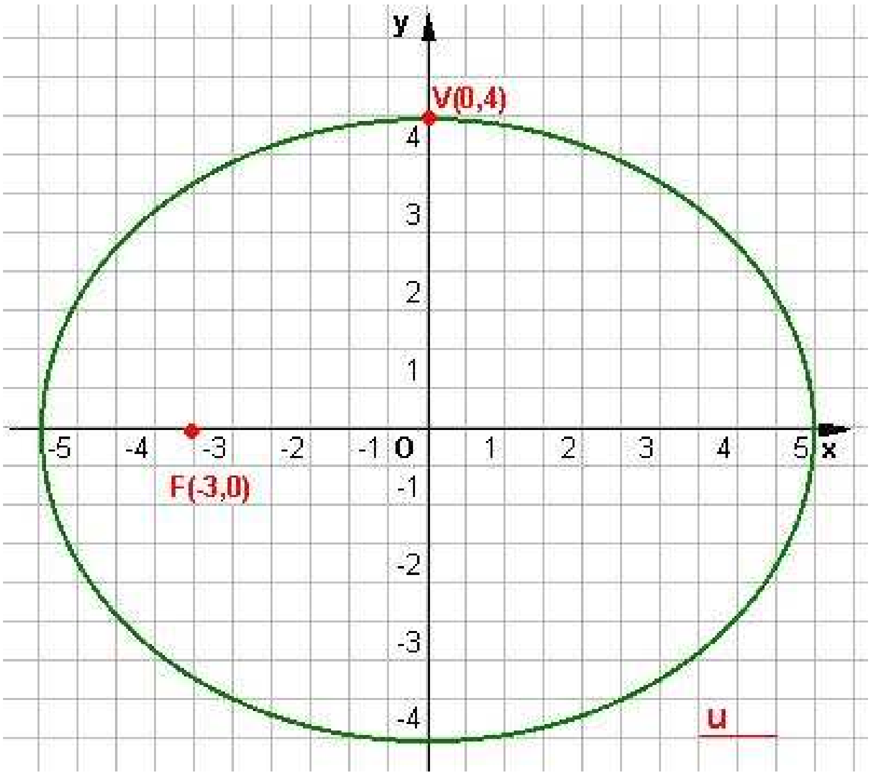
Essendo b = – 2 si ottiene $b^2 = 4$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è:

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Problema 3

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x, avente un fuoco nel punto F(– 3 ; 0) ed avente un vertice in V(0 ; 4).



Essendo b = 4 si ottiene b^2 = 16.

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, poichè $c^2 = 9$, si ottiene

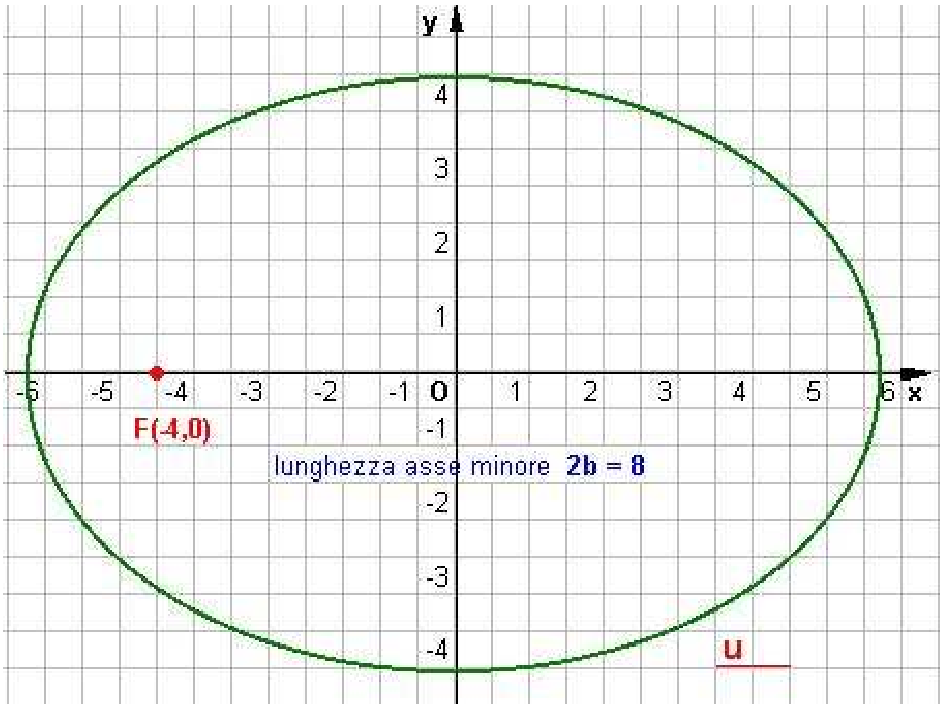
$$a^2 = 16 + 9 = 25.$$

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Problema 4

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x, avente asse minore di lunghezza 2b = 8 e un fuoco nel punto F (– 4 ; 0).



Essendo 2b = 8 si ottiene b = 4 e quindi b^2 = 16.

Dalla relazione

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

poichè c^2 = 16, si ottiene

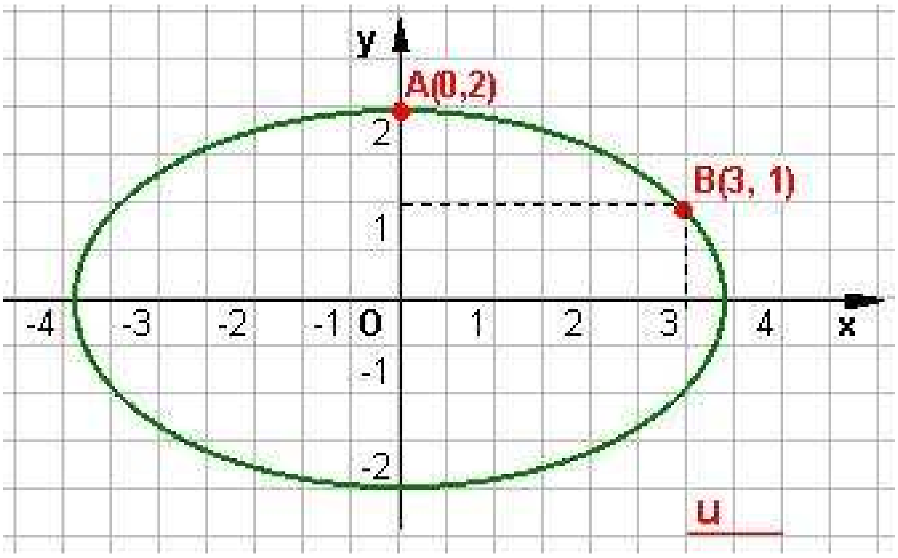
$$a^2 = 16 + 16 = 32.$$

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Problema 5

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse x, passante per A (0;2) e B(3;1).



Essendo b = 2, in quanto il punto A è vertice dell'ellisse, si ottiene

$b^2 = 4$.

Imponendo l'appartenenza del punto B(3;1) all'ellisse si ottiene l'equazione

$$\frac{9}{m}+\frac{1}{4}=1$$

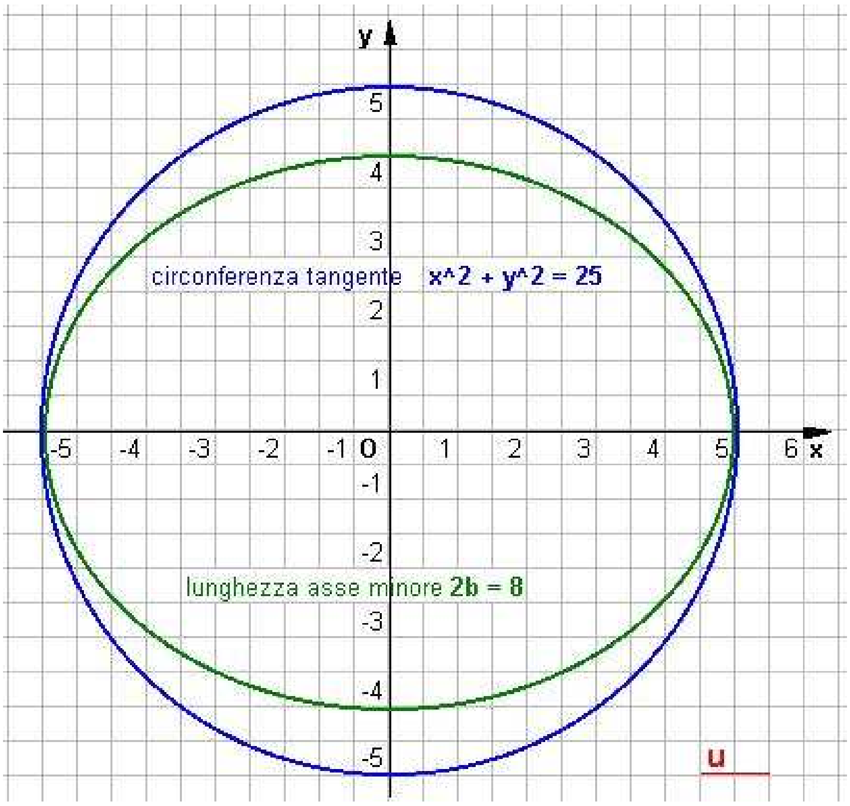
che risolta fornisce il valore

$m = a^2 = 12$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è $$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$

Problema 6

Determinare l'equazione dell'ellisse avente l'asse maggiore sull'asse x, l'asse minore di lunghezza 2b = 8 e tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 25$.



Essendo 2b = 8 si ottiene b = 4 e quindi

$b^2 = 16$.

Mettendo a sistema l'equazione dell'ellisse $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{16}=1$

con l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = 25$,

imponendo la condizione di tangenza **$\Delta = 0$** si ottiene il valore di m:

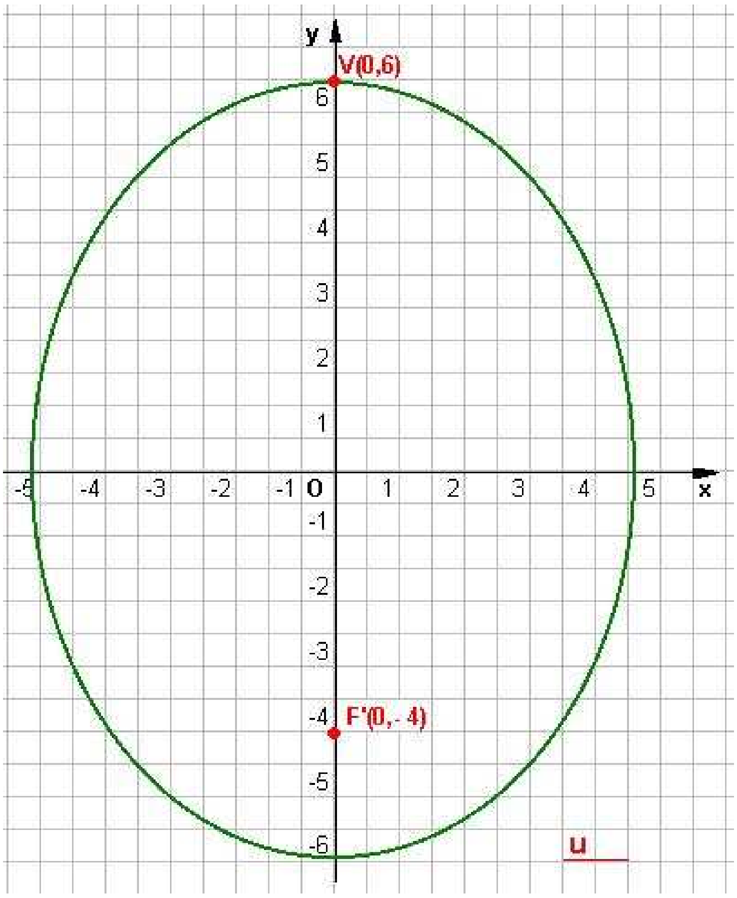
$m = a^2 = 25$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Problema 7

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse y, avente un vertice nel punto V (0;6) e un fuoco nel punto F(0;– 4).



Essendo b = 6 si ottiene $b^2 = 36$.

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$,

poichè $c^2 = 16$,

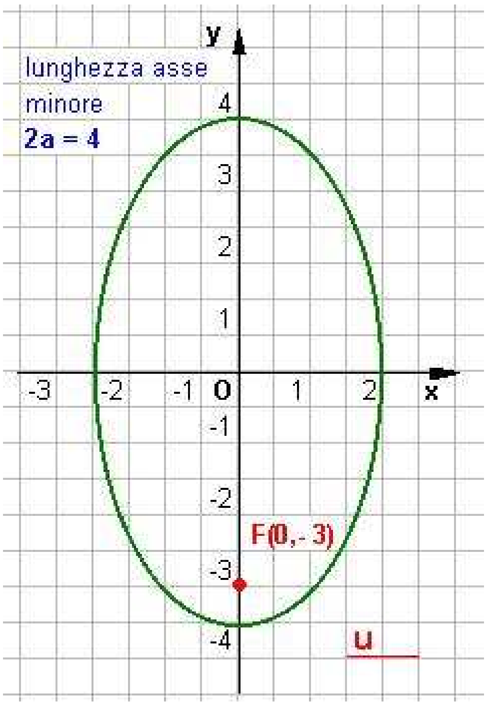
si ottiene $a^2 = 36 - 16 = 20$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$$

Problema 8

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse y, avente asse minore di lunghezza 2a = 4 e un fuoco nel punto F(0 ;-3).



Essendo 2a = 4 si ottiene a = 2 e quindi $a^2 = 4$.

Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$, poichè $c^2 = 9$,

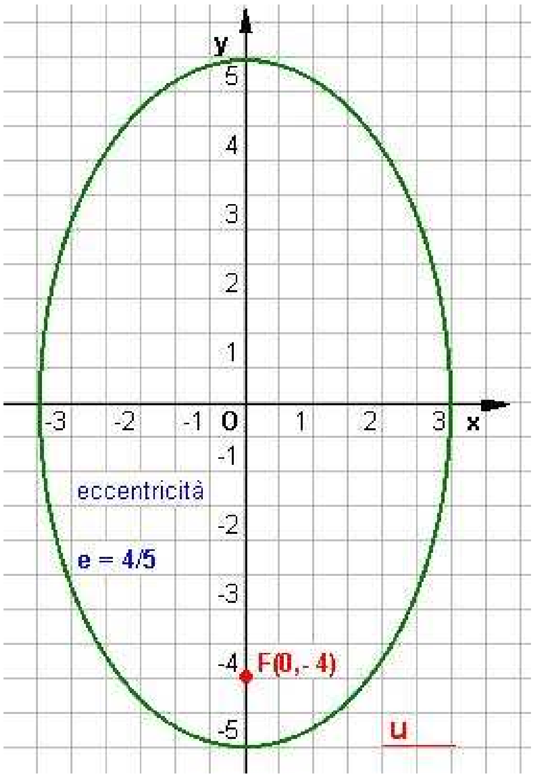
si ottiene $b^2 = 9 + 4 = 13$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$$

Problema 9

Determinare l'equazione dell'ellisse avente asse maggiore sull'asse y, eccentricità e = 4/5 e un fuoco nel punto F(0 ;– 4).



Essendo e = c/b , poichè $c^2 = 16$, si ottiene 16/n = 16 /25,
da cui si ricava $n = b^2 = 25$.

Dalla relazione $c^2 = a^2 – b^2$

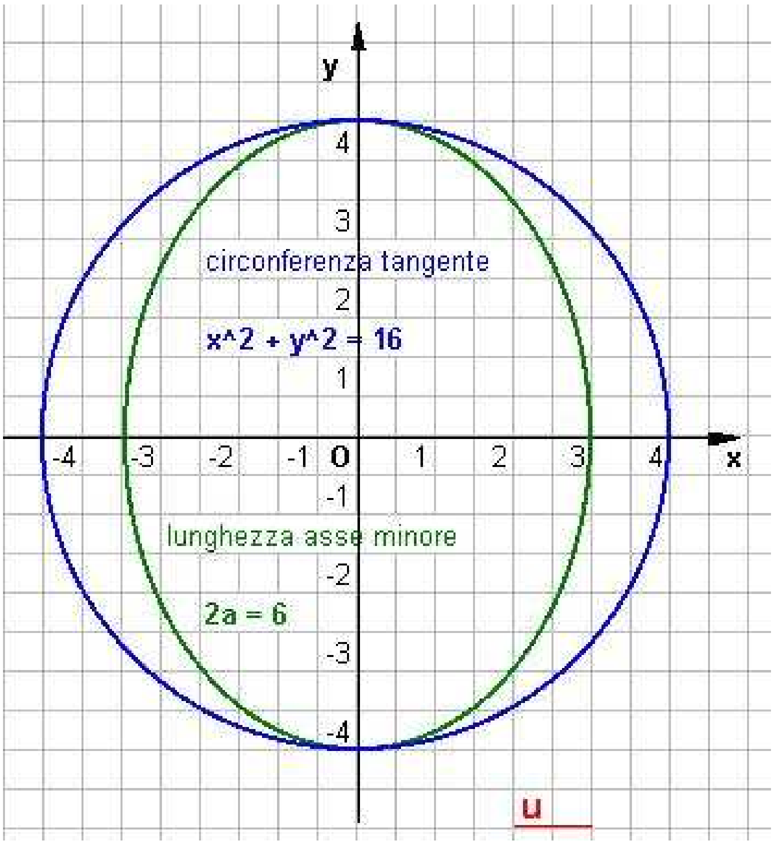
si ottiene $a^2 = 25 – 16 = 9$.

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

Problema 10

Determinare l'equazione dell'ellisse con asse maggiore sull'asse y, avente l'asse minore di lunghezza 2a = 6 e tangente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 16$.



Essendo 2a = 6 si ottiene a = 3 e quindi $a^2 = 9$.

Mettendo a sistema l'equazione dell'ellisse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{n}=1$$

con l' equazione della circonferenza

$$x^2 + y^2 = 16,$$

imponendo la condizione di tangenza **Δ = 0** si ottiene il valore di n:

$$n = b^2 = 16.$$

Dunque l'equazione dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

Problema 11

Scrivere l'equazione dell'ellisse, riferita ai propri assi, di semiassi lunghi 3 e 5.

Essendo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a^2 - c^2 = b^2$ abbiamo $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

Problema 12

Scrivere l'equazione dell'ellisse, riferita ai propri assi, lunghi 10 e 8, e trovare le intersezioni di essa con la retta passante per A(– 3, 8) e per il fuoco F_2(c ;0) posto sul semiasse positivo delle x.

Essendo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ con $a^2 - c^2 = b^2$ abbiamo:

per l'ellisse essendo il semiasse maggiore pari a: a = $\frac{10}{2}=5$ ed il semiasse minore pari a :

b = $\frac{8}{2}$ = 4 da cui $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Per il fuoco abbiamo, dalla relazione precedente : $c=\pm\sqrt{a^2-b^2}=\pm\sqrt{25-16}=\pm\sqrt{9}=\pm 3$

ci interessa solo quello del semiasse positivo da cui F_2(3 ;0),

Applicando l'equazione generica della retta passante per due punti cioè A(–3 ;8) e F_2(3 ;0) abbiamo:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

abbiamo $\frac{y-0}{x-3}=\frac{8-0}{-3-3}$ cioè –6y = 8(x –3) da cui – 6y = 8x – 24

Infine per determinare le intersezioni fra la retta trovata e l'ellisse data si imposterà il sistema:

$$\begin{cases} -6y = 8x - 24 \\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x = 24 - 6y \\ 16x^2 + 25y^2 = 400 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{(24-6y)^2}{64} \\ 16\frac{(24-6y)^2}{64} + 25y^2 = 400 \end{cases}$$

Elaboriamo la seconda equazione:

$$\frac{(24-6y)^2}{4} + 25y^2 = 400$$

$576 + 36y^2 - 288y + 100y^2 - 1600 = 0$

$136y^2 - 288y - 1124 = 0$ applicando la formula ridotta si ha

$$y_{12} = \frac{144 \pm \sqrt{20736 + 139264}}{136} = \frac{144 \pm 400}{136} = \begin{cases} \nearrow y_1 = -\frac{256}{136} = -\frac{32}{17} \\ \searrow y_2 = \frac{544}{136} = 4 \end{cases}$$

Ne consegue

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{32}{17} \\ x_1 = \frac{24 + 6 \bullet \frac{32}{17}}{8} = \frac{24 + \frac{192}{17}}{8} = \frac{1}{8}\left(\frac{408 + 192}{17}\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{600}{17}\right) = \frac{75}{17} \end{cases}$$

da cui il primo punto $M(\frac{75}{17}, -\frac{32}{17})$

Infine

$$\begin{cases} y_2 = 4 \\ x_2 = \frac{24 - 24}{8} = 0 \end{cases}$$

cioè M(0,4).

Problema 13

Scrivere l'equazione dell'ellisse di fuochi F(0, ± 3) e di semiasse maggiore lungo 4. Trovare le intersezioni di essa con la curva $x^2 + y^2 = 16$.

Essendo a = 4 si ottiene $a^2 = 16$. Dalla relazione $c^2 = a^2 - b^2$ si ottiene $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$. Mettendo a sistema l'equazione dell'ellisse $x^2/16 + y^2/7 = 1$ con l' equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = 16$ si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 16 - y^2 \\ 7(16 - y^2) + 16y^2 = 112 \end{cases}$$

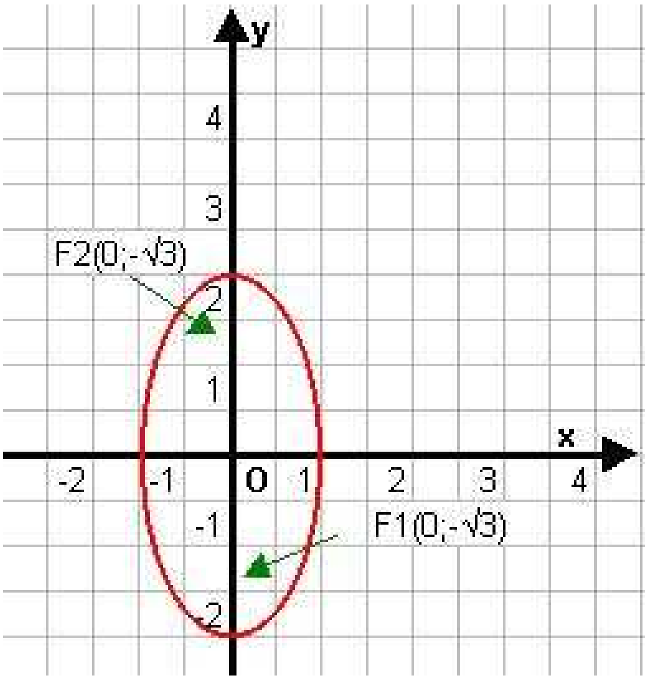
Elaboriamo solo la seconda

$112 - 7y^2 + 16y^2 = 112$
$9y^2 = 0$
$y = 0$ da cui sostituendo nella prima $x_{12} = \pm 4$

Concludendo l'intersezioni delle due curve sono nei punti $P_1(-4;0)$ e $P_2(4;0)$.

Problema 14

Trovare i fuochi dell'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ e rappresentarla.



Dall'equazione dell'ellisse data $4x^2 + y^2 = 4$ dividiamo il tutto per 4 ottenendo la forma

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

ne consegue che i semiassi sono:
maggiore a = 1
mentre il minore b = 2,
se ne deduce che essendo b > a l'ellisse giace sull'asse y.
A riprova in questo caso essendo $c^2 = b^2 - a^2$
si ottiene $c^2 = \pm\sqrt{b^2 - a^2} = \pm\sqrt{4-1} = \pm\sqrt{3}$.

Concludendo le coordinate dei fuochi sono

$F_1(0; -\sqrt{3})$ e $F_2(0; \sqrt{3})$

Problema 15

Data la distanza focale lunga 10 e l'asse maggiore lungo 12, scrivere l'equazione dell'ellisse riferita ai propri assi.

Essendo la distanza focale pari a 2c = 10 nel nostro caso c = 5, il semiasse maggiore è 2a = 12 cioè a = 6; essendo $a^2 - c^2 = b^2$ avremo $b^2 = 36 - 25 = 11$.

Concludendo l'equazione dell'ellisse cercata è $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

Problema 16

Scrivere l'equazione dell'ellisse, avente i fuochi F(± 3,0) e passante per il punto P(0,4).

Essendo la distanza focale pari a c = 3 dalle coordinate dei fuochi nel nostro caso $c^2 = 9$, inoltre dalle coordinate del punto P si deduce che l'asse minore b = 4 (sull'asse y) quindi $b^2 = 16$, e dalla relazione $a^2 - c^2 = b^2$ abbiamo $a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 9 = 25$.

Concludendo l'equazione dell'ellisse cercata è : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

Problema 17

Trovare le equazioni delle tangenti all'ellisse $4x^2 + y^2 = 4$ uscenti dal punto P(2,2).

Si scrive l'equazione del fascio proprio di rette di centro P cioè y – 2 = m(x+2).
L'equazione così determinata la metteremo a sistema con l'equazione dell'ellisse data e imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ si otterranno i valori di m cercati.

$$\begin{cases} y - 2 = m(x - 2) \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx - 2m + 2 \\ 4x^2 + (mx + 2m + 2)^2 = 4 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda
$4x^2 + m^2x^2 + 4m^2 + 4 - 4m^2x + 4mx - 8m = 4$
$4x^2 + m^2x^2 + 4m^2 - 4m^2x + 4mx - 8m = 0$
$x^2(4 + m^2) + 4mx(m - 1) + 4m(m - 2) = 0$
da $\Delta = 0$ abbiamo
$4m^2(m - 1)^2 - 4m(4 + m^2)(m - 2) = 0$
$4m^2(m^2 - 2m + 1) - (4 + m^2)(4m^2 - 8m) = 0$
$4m^4 - 8m^3 + 4m^2 - (16m^2 - 32m + 4m^4 - 8m^3) = 0$
$4m^4 - 8m^3 + 4m^2 - 16m^2 + 32m - 4m^4 + 8m^3 = 0$
$-12m^2 + 32m = 0$
$4m(3m - 8) = 0$ da cui $m = 0$ e $m = 8/3$
Conseguentemente le rette tangenti sono
Per $m = 0$ $\quad y = 2$
Per $m = 8/3$ $\quad y - 2 = \frac{8}{3}(x - 2)$ da cui
$3y - 6 = 8x - 16$
$3y - 8x + 16 - 6 = 0$
$8x - 3y - 10 = 0$

Problema 18
Trovare le intersezioni dell'ellisse $x^2 + 4y^2 = 4$ con la retta $3x - 8y - 10 = 0$.

Metteremo a sistema l'equazione dell'ellisse data e della retta imponendo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ si otterranno i valori dei punti cercati

$$\begin{cases} 3x - 8y - 10 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{10 + 8y}{3} \\ \left(\dfrac{10 + 8y}{3}\right)^2 + 4y^2 = 4 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda
$(10 + 8y)^2 + 36y^2 = 36$
$100 + 64y^2 + 160y + 36y^2 = 36$
$100y^2 + 160y + 64 = 0$
$25y^2 + 40y + 16 = 0$
da $\Delta = 0$ abbiamo

$$y = \frac{-20 \pm \sqrt{400 - 400}}{25} = -\frac{20}{25} = -\frac{4}{5}$$

Da cui sostituendo nella prima equazione si ha

$x = \dfrac{10 - 8 \bullet \frac{4}{5}}{3} = \dfrac{\frac{50-32}{5}}{3} = \dfrac{18}{5} \bullet \dfrac{1}{3} = \dfrac{6}{5}$ da cui il punto d'intersezione P($\frac{6}{5}$;$-\frac{4}{5}$).

Problema 19

Determinare i punti comuni all'ellisse, di equazione riferita ai propri assi, di semiassi lunghi 5 e 2, con la circonferenza di centro O(0,0) e raggio lungo 3.

Per ottenere l'equazione dell'ellisse avendo che il semiasse maggiore a = 5 ed il semiasse minore b = 2 avremo che da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ otteniamo $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Per ottenere l'equazione della circonferenza utilizziamo l'espressione $(x - \alpha)^2+(y - \beta)^2 = r^2$, avendo il raggio r = 3 e le coordinate del centro O(0,0) quindi : $x^2 + y^2 = 9$.

Mettendo a sistema le due equazioni abbiamo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 9 - y^2 \\ 4x^2 + 25y^2 = 100 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda

$4(9 - y^2)+ 25y^2 = 100$

$36 - 4y^2 + 25y^2 = 100$

$21y^2 = 100 - 36$

$$y = \pm\sqrt{\frac{64}{21}} = \pm\frac{8}{\sqrt{21}} = \pm\frac{8\sqrt{21}}{21}$$

Conseguentemente

$$x = \pm\sqrt{9 - \frac{64}{21}} = \pm\sqrt{\frac{125}{21}} = \pm\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{21}} = \pm\frac{5\sqrt{105}}{21}$$

In conclusione i punti d'intersezione cercati sono:

A($\frac{5\sqrt{105}}{21}$; $\frac{8\sqrt{21}}{21}$) B($-\frac{5\sqrt{105}}{21}$; $-\frac{8\sqrt{21}}{21}$) C ($\frac{5\sqrt{105}}{21}$; $-\frac{8\sqrt{21}}{21}$) D ($-\frac{5\sqrt{105}}{21}$; $\frac{8\sqrt{21}}{21}$)

Problema 20

Determinare le intersezioni dell'ellisse, di equazione riferita ai propri assi, di semiassi lunghi 3 e 5, con la circonferenza di centro O(0,0) e passante per il punto P(√5, $\frac{10}{3}$).

Per ottenere l'equazione dell'ellisse avendo che i semiassi a = 3 e b = 5 avremo che da $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ otteniamo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

Per ottenere l'equazione della circonferenza utilizziamo l'espressione $(x - \alpha)^2+(y - \beta)^2 = r^2$, calcolando il raggio r dalla formula della distanza tra i due punti dati

$r^2 = d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = x_2{}^2 + y_2{}^2 = 5 + \frac{100}{9} = \frac{145}{9}$

quindi $x^2 + y^2 = \frac{145}{9}$

Mettendo a sistema le due equazioni abbiamo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{145}{9} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{145}{9} - y^2 \\ 25x^2 + 9y^2 = 225 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = \frac{145}{9} - y^2 \\ 25(\frac{145}{9} - y^2) + 9y^2 = 225 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda

$3625 - 225y^2 + 81y^2 = 2025$

$144y^2 = 1600$

$y = \pm\sqrt{\frac{1600}{144}} = \pm\frac{40}{12} = \pm\frac{10}{3}$

Conseguentemente

$x^2 = \frac{145}{9} - \frac{1600}{144} = \frac{2880 - 14400}{1296} = \frac{6400}{1296} = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$

In conclusione i punti d'intersezione cercati sono:

A($\sqrt{5}$; $\frac{10}{3}$) B($-\sqrt{5}$; $-\frac{10}{3}$) C ($-\sqrt{5}$; $\frac{10}{3}$) D ($\sqrt{5}$; $-\frac{10}{3}$)

Problema 21

Trovare le intersezioni dell'ellisse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ con la circonferenza $9x^2 + 9y^2 = 145$.

Mettendo a sistema le due equazioni abbiamo

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ 9x^2 + 9y^2 = 145 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 = 145 - 9y^2 \\ 9x^2 + 25y^2 = 225 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda

$145 - 9y^2 + 25y^2 = 225$

$16y^2 = 225 - 145$

$16y^2 = 80$

$y = \pm\sqrt{\frac{80}{16}} = \pm\sqrt{\frac{10}{2}} = \pm\sqrt{5}$

Conseguentemente

$x^2 = \frac{145 - 9 \bullet 5}{9} = \frac{100}{9}$

$x = \pm\sqrt{\frac{100}{9}} = \pm\frac{10}{3}$

In conclusione i punti d'intersezione cercati sono:

A($\frac{10}{3}$; $\sqrt{5}$) B($-\frac{10}{3}$; $-\sqrt{5}$) C ($-\frac{10}{3}$; $\sqrt{5}$) D ($\frac{10}{3}$; $-\sqrt{5}$)

Problema 22

Scrivere le equazioni delle tangenti comuni alle curve $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$ **e** $x^2 + y^2 = 64$**.**

Procederemo mettendo a sistema con la retta generica y = mx + n alternativamente le due curve indi imporremo la condizione di tangenza **Δ = 0** per ambedue le equazioni così ottenute, infine le due condizioni (equazioni in m ed n) costituiranno il sistema risolvente.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1 \\ y = mx + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36x^2 + 100y^2 = 3600 \\ y = mx + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + n \\ 36x^2 + 100(mx + n)^2 = 3600 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda

$36x^2 + 100(m^2x^2 + n^2 + 2mnx) = 3600$
$9x^2 + 25(m^2x^2 + n^2 + 2mnx) = 900$
$9x^2 + 25m^2x^2 + 25n^2 + 50mnx – 900 = 0$
$x^2(9 + 25m^2) + 50mnx + 25(n^2 – 36) = 0$

Analogamente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 64 \\ y = mx + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + n \\ x^2 + (mx + n)^2 = 64 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx + n \\ x^2 + (m^2x^2 + n^2 + 2mnx) = 64 \end{cases}$$

Elaboriamo solo la seconda

$x^2(1+ m^2) + 2mnx + n^2 – 64 = 0$

Per ambedue le relazioni vale la condizione di tangenza **Δ** = 0 e nel nostro caso con la formula ridotta abbiamo

$(25mn)^2 – 25(9 + 25m^2)(n^2 – 36) = 0$
$625m^2n^2 – 25(9n^2 – 324 +25m^2n^2 – 900m^2)= 0$
$625m^2n^2– 225n^2+8100–625m^2n^2–22500m^2= 0$
$– 225n^2 + 8100 – 22500m^2 = 0$
$100m^2 – n^2 + 36 = 0$

Analogamente

$m^2n^2 – (1+ m^2)(n^2 – 64) = 0$
$m^2n^2 – (n^2 – 64 + m^2n^2 - 64m^2) = 0$
$m^2n^2 – n^2 + 64 – m^2n^2 + 64m^2 = 0$
$– n^2 + 64 + 64m^2 = 0$
$+ 64m^2 – n^2 + 64 = 0$

Mettendo a sistema le ultime due eq.ni avremo

$$\begin{cases} 64m^2 - n^2 + 64 = 0 \\ 100m^2 - n^2 + 36 = 0 \quad \cdot(-1) \end{cases}$$
$$-36m^2 \quad // \quad + 28 = 0$$

da cui

$$m = \pm\sqrt{\frac{28}{36}} = \pm\sqrt{\frac{7}{9}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

e dalla 1^ equazione abbiamo:

$$64 \bullet \frac{28}{36} - n^2 + 64 = 0$$
$$\frac{448}{9} - n^2 + 64 = 0$$
$$448 - 9n^2 + 576 = 0$$
$$-9n^2 + 1024 = 0$$
$$n = \pm\sqrt{\frac{1024}{9}} = \pm\frac{32}{3}$$

in conclusione le rette tangenti hanno espressione

$$y = mx + n = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}x \pm \frac{32}{3}$$

Problema 23

Determinare le coordinate dei vertici e dei fuochi e l'eccentricità delle seguenti ellissi :

1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ **2) $4x^2 + y^2 = 4$** **3) $9x^2 + 16y^2 = 144$**

1) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ In questo primo esercizio si nota che $a^2 - c^2 = b^2$

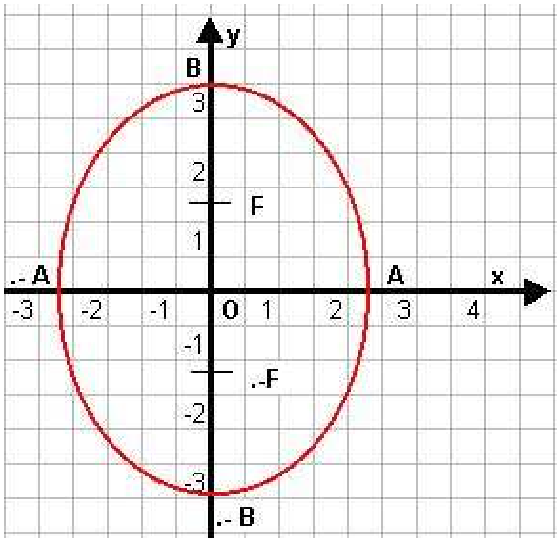
L'ellissi è del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $e = \frac{c}{a}$

Quindi

$$a = \sqrt{36} = 6$$
$$b = \sqrt{9} = 3$$
$$c^2 = 36 - 9 = 27$$
$$c = \sqrt{27}$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{27}}{6} = 0{,}6 < 1$$

$F_1(-c\,;0) \Rightarrow F_1(-\sqrt{27}\,;0)$
$A_1(-a\,;0) \Rightarrow A_1(-6\,;0)$
$B_1(0\,;-b) \Rightarrow B_1(0\,;-3)$

$F_2(c\,;0) \Rightarrow F_2(\sqrt{27}\,;0)$
$A_2(a\,;0) \Rightarrow A_2(6\,;0)$
$B_2(0\,;b) \Rightarrow B_2(0\,;3)$



2) $4x^2 + y^2 = 4$

In questo secondo esercizio si nota che $b^2 - a^2 = c^2$

E l'ellissi è del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

con $e = \frac{a}{c}$

Quindi

$a=\sqrt{1}=1$

$b=\sqrt{4}=2$

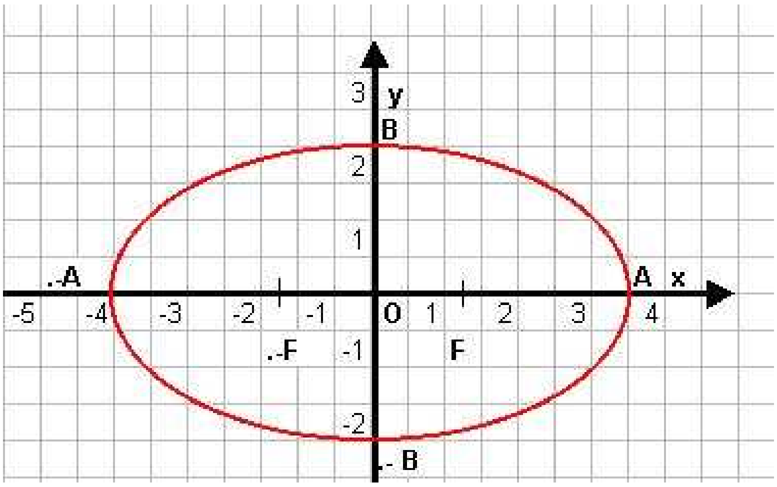
$c^2=4-1=3$

$c=\sqrt{3}$

$e=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=0{,}57<1$

$F_1(0;-c) \Rightarrow F_1(0;-\sqrt{3})$
$A_1(0;-a) \Rightarrow A_1(0;-1)$
$B_1(-b;0) \Rightarrow B_1(-2;0)$

$F_2(0;c) \Rightarrow F_2(0;\sqrt{3})$
$A_2(0;a) \Rightarrow A_2(0;1)$
$B_2(b;0) \Rightarrow B_2(2;0)$



3) $9x^2 + 16y^2 = 144$

$\dfrac{9x^2}{144}+\dfrac{16y^2}{144}=1$

$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$

In questo terzo esercizio si nota che $a^2 - c^2 = b^2$

E l'ellissi è del tipo $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

con $e=\dfrac{c}{a}$

Quindi

$a=\sqrt{16}=4$

$b=\sqrt{9}=3$

$c^2=16-9=7$

$c=\sqrt{7}$

$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}=0{,}66<1$

$F_1(-c;0) \Rightarrow F_1(-\sqrt{7};0)$
$A_1(-a;0) \Rightarrow A_1(-4;0)$
$B_1(0;-b) \Rightarrow B_1(0;-3)$

$F_2(c;0) \Rightarrow F_2(\sqrt{7};0)$
$A_2(a;0) \Rightarrow A_2(4;0)$
$B_2(0;b) \Rightarrow B_2(0;3)$

Problema 24

Determinare le coordinate dei vertici e dei fuochi e l'eccentricità delle seguenti ellissi che soddisfano le seguenti condizioni :

a) Il semiasse maggiore è uguale a 5 e l'ellisse passa per il punto A(0, $-\dfrac{5}{4}$)

b) Il semiasse minore è uguale a √2 e l'ellisse passa per il punto B(– 1,2)

c) Il semiasse minore è uguale a 5 e uno dei fuochi è il punto F(3,0)

a) ellissi del tipo $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ con a = 5

quindi $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ imponiamo il passaggio per il punto A(0, $-\dfrac{5}{4}$)

$$0+\frac{\left(-\frac{5}{4}\right)^2}{b^2}=1$$

$$b^2=\frac{25}{16}\ \Rightarrow\ b=\frac{5}{4}$$

ne consegue $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{25}{16}}=1$

$$a^2-c^2=b^2$$

$$c^2=a^2-b^2=25-\frac{25}{16}=\frac{375}{16}$$

$$c=\pm\sqrt{\frac{375}{16}}=\pm\frac{5\sqrt{15}}{4}$$

Concludendo :

Fuochi

$F_{12}\left(\pm\frac{5\sqrt{15}}{4};0\right)$

Vertici

$A_{12}(\pm 5\ ;0)$

$B_{12}\left(0\ ;\pm\frac{5}{4}\right)$

b) ellissi del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **con** $b=\sqrt{2}$

quindi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ imponiamo il passaggio per il punto B(– 1,2)

$$\frac{1}{a^2}+\frac{4}{2}=1 \qquad \frac{1}{a^2}+2=1 \qquad \frac{1}{a^2}=1-2\ \Rightarrow\ a^2=-1$$

da cui $-\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}=1$

c) ellissi del tipo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **con** $b=5$ **ed** $F(\pm c;0)=F(3,0)$ **da cui**

$a^2-b^2=c^2$
$a^2=c^2+b^2$
$a^2=9+25=34$

quindi $\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1$

Problema 25

Data l'ellisse $x^2+9y^2=1$, determinare le equazioni delle rette tangenti, parallele alla retta $x+3y=1$

La retta data con le tangenti costituiscono un fascio improprio di rette di equazione $x+3y=k$
Del fscio così definito a noi interessano le tangenti, quindi:

$$\begin{cases} x+3y=k \\ x^2+9y^2=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=k-3y \\ (k-3y)^2+9y^2=1 \end{cases}$$

Elaboriamo quest'ultima:

$k^2+9y^2-6ky+9y^2=1$
$k^2-6ky+18y^2-1=0$

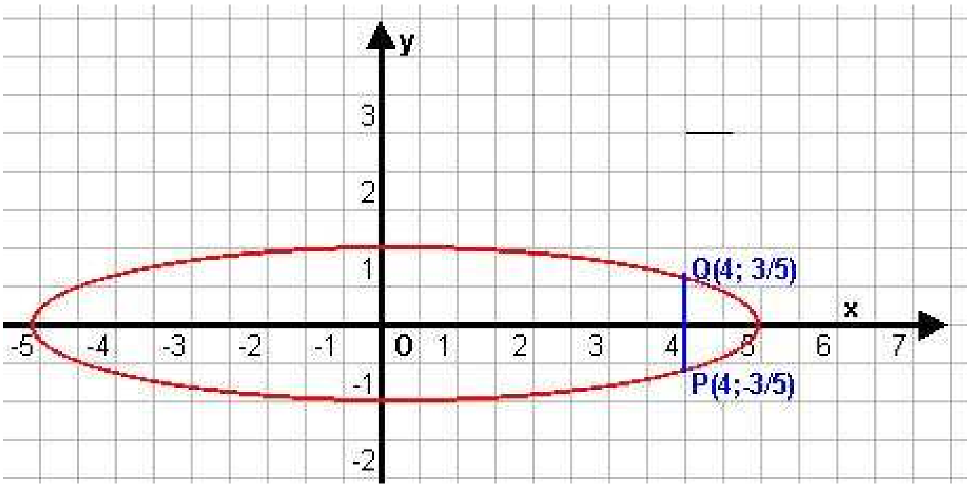
L'equazione così ottenuta ci fornirà i valori cercati in quanto basterà imporre la condizione di tangenza Δ = 0 in questo caso $\frac{\Delta}{4} = 0$

$9k^2 - 18(k^2 - 1) = 0$
$9k^2 - 18k^2 + 18 = 0$
$-9k^2 + 18 = 0$
$k^2 - 2 = 0$
$k = \pm\sqrt{2}$

ne consegue che le rette cercate hanno equazione $x + 3y = \pm\sqrt{2}$

Problema 26

Data l'ellisse di equazione $x^2 + 25y^2 = 25$, determinare le equazioni delle rette tangenti nei suoi punti di ascissa 4.



a = 5 b = 1

Ricerchiamo le ordinate dei punti di tangenza:

$$\begin{cases} x = 4 \\ x^2 + 25y^2 = 25 \end{cases}$$

da cui sostituendo ed elaborando la 2^ si ha:

$16 + 25y^2 = 25$
$25y^2 = 25 - 16$
$25y^2 = 9$

$$y_{12} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

Quindi le coordinate dei punti sono: $P(4; -\frac{3}{5})$ $Q(4; \frac{3}{5})$

I° Modo)

Mettiamo a sistema la retta generica passante per il punto "P" con l'equazione dell'ellisse, da questo sistema determineremo la condizione di tangenza **Δ = 0**

$x^2 + 25y^2 = 25$

$y + \frac{3}{5} = m(x-4)$

$x^2 + 25\left[m(x-4) - \frac{3}{5}\right]^2 = 25$

$\begin{cases} y = m(x-4) - \frac{3}{5} \\ \end{cases}$

elaboriamo la seconda

$x^2 + 25m^2(x-4)^2 + 9 - 30m(x-4) = 25$

$x^2 + 25m^2(x^2 - 8x + 16) - 30mx + 120m + 9 - 25 = 0$

$x^2 + 25m^2x^2 - 200m^2x + 400m^2 - 30mx + 120m - 16 = 0$

$x^2(1 + 25m^2) - 2x(100m^2 + 15m) + 400m^2 + 120m - 16 = 0$

Quindi

$\Delta = 0$ in questo caso $\frac{\Delta}{4} = 0$ da cui

$(100m^2 + 15m)^2 - (1 + 25m^2)(400m^2 + 120m - 16) = 0$

$10000m^4 + 3000m^3 + 225m^2 - (400m^2 + 120m - 16 + 10000m^4 + 3000m^3 - 400m^2) = 0$

$10000m^4 + 3000m^3 + 225m^2 - 400m^2 - 120m + 16 - 10000m^4 - 3000m^3 + 400m^2 = 0$

$225m^2 - 120m + 16 = 0$

$$m_1 = \frac{60 \pm \sqrt{3600 - 3600}}{225} = \frac{60}{225} = \frac{4}{15}$$

ne consegue il valore m_1 e quindi l' equazione è per il punto $P(4; -\frac{3}{5})$

$y + \frac{3}{5} = \frac{4}{15}(x-4)$

$15y + 9 = 4x - 16$

$15y - 4x + 25 = 0$ eq. 1^ tang.

Mettiamo a sistema la retta generica passante per il punto "Q" con l'equazione dell'ellisse, da questo sistema determineremo la condizione di tangenza $\Delta = 0$

$$\begin{cases} x^2 + 25y^2 = 25 \\ y - \frac{3}{5} = m(x-4) \end{cases} \qquad \begin{cases} y = m(x-4) - \frac{3}{5} \\ x^2 + 25\left[m(x-4) + \frac{3}{5}\right]^2 = 25 \end{cases}$$

elaboriamo la seconda

$x^2 + 25m^2(x-4)^2 + 9 + 30m(x-4) = 25$

$x^2 + 25m^2(x^2 - 8x + 16) + 30mx - 120m + 9 - 25 = 0$

$x^2 + 25m^2x^2 - 200m^2x + 400m^2 + 30mx - 120m - 16 = 0$

$x^2(1 + 25m^2) - 2x(100m^2 - 15m) + 400m^2 - 120m - 16 = 0$

Quindi

$\Delta = 0$ in questo caso $\frac{\Delta}{4} = 0$ da cui

$(100m^2 - 15m)^2 - (1 + 25m^2)(400m^2 - 120m - 16) = 0$

$10000m^4 - 3000m^3 + 225m^2 - (400m^2 - 120m - 16 + 10000m^4 - 3000m^3 - 400m^2) = 0$

$10000m^4 - 3000m^3 + 225m^2 - 400m^2 + 120m + 16 - 10000m^4 + 3000m^3 + 400m^2 = 0$

$225m^2 + 120m + 16 = 0$

$$m_1 = \frac{-60 \pm \sqrt{3600-3600}}{225} = -\frac{60}{225} = -\frac{4}{15}$$

ne consegue il valore m_1 e quindi l' equazione è per il punto Q$(4; \frac{3}{5})$

$$y - \frac{3}{5} = -\frac{4}{15}(x-4)$$

$15y - 9 = -4x + 16$

$15y + 4x - 25 = 0$ eq. 2^ tang.

II° Modo) Molto velocemente allo stesso risultato si poteva arrivare applicando la formula dello sdoppiamento $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$

e per il punto P$(4; -\frac{3}{5})$

$$\frac{x \bullet 4}{25} + \frac{y\left(-\frac{3}{5}\right)}{1} = 1$$

$4x - \frac{3}{5}y \bullet 25 = 25$

$4x - 15y - 25 = 0$ eq. 1^ tang.

sia per il punto Q $(4; \frac{3}{5})$

$$\frac{x \bullet 4}{25} + \frac{y\left(\frac{3}{5}\right)}{1} = 1$$

$4x + \frac{3}{5}y \bullet 25 = 25$

$4x + 15y - 25 = 0$ eq. 2^ tang

Problema 27

Determinare le equazioni delle rette tangenti all'ellisse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ e parallele alla retta $5x + 4y - 20 = 0$.

Le rette parallele alla data costituiscono un fascio improprio di equazione $5x + 4y - k = 0$. Mettiamo a sistema il fascio con l'ellisse, ricavata un'incognita e sostituita nell'equazione dell'ellisse avremo una equazione con una sola incognita il cui $\Delta = 0$ fornirà i valori cercati.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \\ 5x + 4y - k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{k-4y}{5} \\ 25x^2 + 16y^2 = 400 \end{cases}$$

sostituiamo ed elaboriamo la seconda

$$25\left(\frac{k-4y}{5}\right)^2 + 16y^2 = 400$$

$k^2 - 8ky + 16y^2 + 16y^2 = 400$

$32y^2 - 8ky - 400 + k^2 = 0$

in questo caso $\frac{\Delta}{4} = 0$ da cui

$16k^2 - 32(k^2 - 400) = 0$

$16k^2 - 32k^2 + 12800 = 0$

$-16k^2 = -12800$

$k^2 = 800$

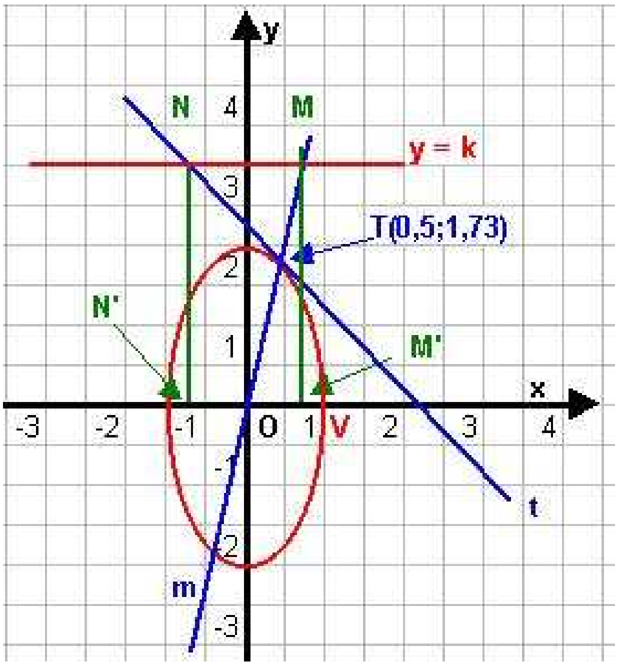
$k = \pm\sqrt{800} = \pm 20\sqrt{2}$

da cui le soluzioni cercate

$5x + 4y \pm 20\sqrt{2} = 0$

Problema 28

Dopo aver determinato l'ellisse avente vertice nel punto (1,0) e tangente alla retta t) $2x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0$; detto T il punto di tangenza condurre una parallela all'asse x, posta nel semipiano $y \geq 0$, in modo che, dette M ed N rispettivamente le intersezioni con il segmento OT (O origine degli assi) e con la retta t), ed M' ed N' rispettivamente le proiezioni di M ed N sull'asse x, il perimetro del rettangolo MM'N'N sia uguale a $\frac{\sqrt{3}+6}{2}$.



L'equazione dell'ellisse è del tipo:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

imponiamo il passaggio per il vertice V(1,0), otteniamo :

$$\frac{1}{a^2} + 0 = 1 \qquad a^2 = 1 \qquad a = \pm 1$$

quindi l'equazione diventa

$$x^2 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Mettiamola a sistema con la retta data, da questo sistema determineremo la condizione di tangenza $\Delta = 0$ per la ricerca del valore del coefficiente b.

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ 2x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{4-\sqrt{3}y}{2} \\ \left(\dfrac{4-\sqrt{3}y}{2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

da cui sostituendo ed elaborando la 2^ si ha:

$$\frac{16 + 3y^2 - 8y\sqrt{3}}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$16b^2 + 3b^2y^2 - 8yb^2\sqrt{3} + 4y^2 = 4b^2$

$y^2(3b^2 + 4) - 8yb^2\sqrt{3} + 12b^2 = 0$

in questo caso $\frac{\Delta}{4} = 0$ da cui

$(4b^2\sqrt{3})^2 - 12b^2(3b^2 + 4) = 0$

$16b^4(3) - (36b^4 + 48b^2) = 0$

$48b^4 - 36b^4 - 48b^2 = 0$

$12b^4 - 48b^2 = 0 \quad b \neq 0$

$b^2 - 4 = 0$

$b = \pm 2$

Quindi l'ellissi cercata ha espressione $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$

Determiniamo il punto di tangenza T

$$\begin{cases} 2x + \sqrt{3}\,y - 4 = 0 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{4 - \sqrt{3}y}{2} \\ \left(\dfrac{4 - \sqrt{3}y}{2}\right)^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{16 + 3y^2 - 8y\sqrt{3}}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$16 + 3y^2 - 8y\sqrt{3} + y^2 = 4$

$4y^2 - 8y\sqrt{3} + 12 = 0$

$y^2 - 2y\sqrt{3} + 3 = 0$

$$y_{12} = \sqrt{3} \pm \sqrt{3-3} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = \frac{4 \bullet 3}{2} = \frac{1}{2}$$

in definitiva $T(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$

Particolarità per ottenere con una sola procedura sia l'ellisse che il punto di tangenza.

Per determinare l'altro coefficiente b^2, sfruttiamo il principio d'identità dei polinomi.
Infatti l'equazione della tangente generica ad una ellisse ha forma (formula sdoppiamento)

$$a^2y_0y + b^2x_0x = a^2b^2$$

nel nostro caso già sappiamo che $a^2 = 1$ quindi :

$$y_0y + b^2x_0x = b^2$$
$$y_0y + b^2x_0x - b^2 = 0$$

l'espressione della tangente è data dal testo, uguagliando le due espressioni abbiamo :

$$y_0y + b^2x_0x - b^2 = 2x + \sqrt{3}\,y - 4$$

i due polinomi sono identici se i coefficienti dei termini simili sono tra loro proporzionali, e la retta è definita a meno di una costante moltiplicativa di proporzionalità posta per semplicità k = 1, quindi:

$$\begin{cases} \dfrac{b^2x_0}{2} = k \\ \dfrac{y_0}{\sqrt{3}} = k \\ \dfrac{-b^2}{-4} = k \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2x_0 = 2 \\ y_0 = \sqrt{3} \\ b^2 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = 4 \\ x_0 = \dfrac{1}{2} \\ y_0 = \sqrt{3} \end{cases}$$

ottenendo così sia il punto di tangenza, che il coefficiente b^2.
Ora l'equazione della retta parallela all'asse x avrà espressione y = k in $y \geq 0$

Per la retta m applicheremo la formula della retta per due punti $T(\frac{1}{2}, \sqrt{3})$ e O(0,0)

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

cioè

$$\frac{y-0}{\sqrt{3}-0}=\frac{x-0}{\frac{1}{2}-0} \qquad \frac{1}{2}y=x\sqrt{3} \qquad y=2x\sqrt{3}$$

Determiniamo ora i punti d'intersezione rispettivamente :
1) M tra OT e la retta y = k
2) N tra la retta tangente all'ellisse e la retta y = k quindi :

$$\begin{cases} y=2x\sqrt{3} \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x=\frac{k}{2\sqrt{3}} \quad \text{per cui} \quad M\left(\frac{k}{2\sqrt{3}}, k\right)$$

$$\begin{cases} 2x+\sqrt{3}y-4=0 \\ y = k \end{cases} \Rightarrow x=\frac{4-\sqrt{3}k}{2} \quad \text{per cui} \quad N\left(\frac{4-\sqrt{3}k}{2}, k\right)$$

conseguentemente le proiezioni M' ed N' sull'asse x avranno espressione:

$$M'\left(\frac{k}{2\sqrt{3}}, 0\right) \qquad N'\left(\frac{4-\sqrt{3}k}{2}, 0\right)$$

Per risolvere il quesito finale dell'esercizio, determiniamo le dimensioni del rettangolo in funzione di k, uguagliandole al dato del testo avremo l'equazione risolvente.

$$\mathbf{d} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \text{ che nel nostro caso sarà}$$

$$d(MN)= d(M'N') = \sqrt{\left(-\frac{k}{2\sqrt{3}}+\frac{4-\sqrt{3}k}{2}\right)^2-(0-0)^2}=\sqrt{\left(\frac{-k+4\sqrt{3}-3k}{2\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{-4k+4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left[\frac{4(\sqrt{3}-k)}{2\sqrt{3}}\right]^2}=\sqrt{\frac{4(\sqrt{3}-k)^2}{3}}=\frac{2(\sqrt{3}-k)}{\sqrt{3}}$$

$$d(MM')=d(NN')=\sqrt{(k-0)^2}=\sqrt{k^2}=k$$

$$2p = 2(MM') + 2(MN) = \frac{\sqrt{3}+6}{2}$$

Sostituendo abbiamo:

$$2k+2\left[\frac{2(\sqrt{3}-k)}{\sqrt{3}}\right]=\frac{\sqrt{3}+6}{2}$$

$$2k+\frac{4(\sqrt{3}-k)}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+6}{2}$$

$$4\sqrt{3}k-8k+8\sqrt{3}=3+6\sqrt{3}$$

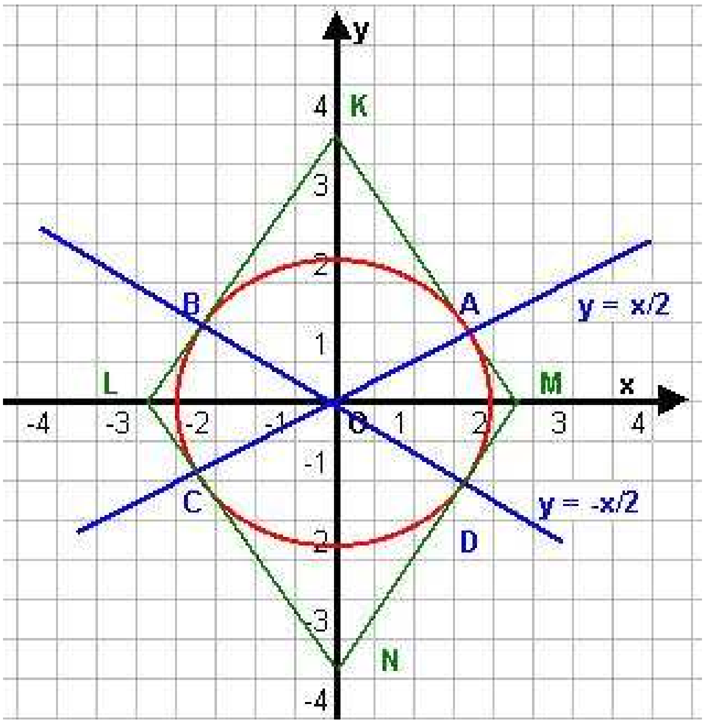
$$4k(\sqrt{3}-2)=3-2\sqrt{3}$$

$$k=\frac{3-2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-2)}\bullet\frac{(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}+2)}=\frac{3\sqrt{3}+6-2\bullet 3-4\sqrt{3}}{4(3-4)}=\frac{-\sqrt{3}}{-4}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Concludendo y = $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Problema 29

Determinare le rette passanti per l'origine sulle quali l'ellisse $3x^2 + 4y^2 = 12$ stacca corde di lunghezze uguali a $\sqrt{15}$.
Detti A, B, C, D, i punti d'intersezione dell'ellisse con tali rette, determinare le equazioni delle rette tangenti all'ellisse in questi punti e l'area del quadrilatero determinato da tali tangenti.



Determiniamo le caratteristiche dell'ellisse data:

$3x^2 + 4y^2 = 12$

$$\frac{3x^2}{12} + \frac{4y^2}{12} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \quad b = \sqrt{3}$$

d = AC = BD = 2AO = $\sqrt{15}$

Il punto A ha coordinate A(x,y) e O (0,0) quindi

AO = $\sqrt{x^2 + y^2}$ uguagliando le due quantità abbiamo:

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{15}$$

$$4(x^2 + y^2) = 15$$

è una circonferenza di centro O (0,0) , che messa a sistema con l'ellisse ci darà i valori delle coordinate dei punti di tangenza.

$$\begin{cases} 4x^2 + 4y^2 = 15 \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \quad -1$$

$x^2 \quad // \quad = 3 \quad \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$ (ascisse)

Per sostituzione dalla 2^ eq. abbiamo :

$9 + 4y^2 = 12$

$4y^2 = 12 - 9$

$4y^2 = 3$

$y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ordinate)

Da cui i punti cercati :

$A(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ $\quad C(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$

$B(-\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2})$ $\quad D(\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$

Per determinare le rette applichiamo la formula della retta passante per due punti:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

retta AC

$$\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}$$

$$\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}$$

$$\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}}=\frac{x-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$2y-\sqrt{3}=x-\sqrt{3}$$

$$y=\frac{1}{2}x$$

retta BD

$$\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}$$

$$\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{x+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\frac{y-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\sqrt{3}}=\frac{x+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$2\sqrt{3}\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sqrt{3}\left(x+\sqrt{3}\right)$$

$$2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\left(x+\sqrt{3}\right)$$

$$2y-\sqrt{3}=-x-\sqrt{3}$$

$$y=-\frac{1}{2}x$$

Altro modo risolutivo di questa prima parte dell'esercizio :

Mettiamo a sistema la retta generica y = mx passante per l'origine con l'equazione con l'equazione dell'ellisse, alle coordinate che troveremo in funzione di "m", applicheremo la formula del calcolo della distanza (Pitagora), dato che conosciamo la misura $\sqrt{15}$.

$$\begin{cases} y = mx \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases}$$

dopo la sostituzione elaboriamo la 2^eq.

$$3x^2+4(mx)^2=12$$

$$x^2(3+4m^2)=12 \quad\Rightarrow\quad x_{12}=\pm\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}$$

Per sostituzione dalla 1^ eq. abbiamo

$$y_{12}=\pm m\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}$$

Coordinate generiche:

$$A\left(\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}};m\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)\qquad C\left(-\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}};-m\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)$$

d = AC = $\sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{15}$ quindi

$$\left(\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}} + \sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)^2 + \left(m\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}} + m\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)^2 = 15$$

$$\left(2\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)^2 + \left(2m\sqrt{\frac{12}{3+4m^2}}\right)^2 = 15$$

$$4\left(\frac{12}{3+4m^2}\right) + 4m^2\left(\frac{12}{3+4m^2}\right) = 15$$

$$\left(\frac{12}{3+4m^2}\right)(4+4m^2) = 15$$

$48(1 + m^2) = 15 (3 + 4m^2)$

$48 + 48m^2 = 45 + 60 m^2$

$- 12m^2 = - 3$

$m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m_{12} = \pm\frac{1}{2}$ ritrovando così: $y = \frac{1}{2}x$ $y = -\frac{1}{2}x$

Ricerchiamo ora le tangenti all'ellisse nei punti d'intersezione determinati :

a) Retta tangente all'ellisse in A($\sqrt{3}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$$\begin{cases} y - \frac{\sqrt{3}}{2} = m (x - \sqrt{3}) \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = m (x - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases}$$ sostituiamo la 1^ nella 2^ ed elaboriamo quest'ultima :

$$3x^2 + 4\left[m\left(x-\sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2 = 12$$

$$3x^2 + 4\left[m^2\left(x-\sqrt{3}\right)^2 + \frac{3}{4} + 2\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}m\left(x-\sqrt{3}\right)\right] = 12$$

$$3x^2 + 4\left[m^2\left(x^2 + 3 - 2\sqrt{3}\right) + \frac{3}{4} + m\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\right] = 12$$

$$3x^2 + 4\left(m^2x^2 + 3m^2 - 2x\sqrt{3}m^2 + \frac{3}{4} + m\sqrt{3}x - 3m\right) = 12$$

$$3x^2 + 4m^2x^2 + 12m^2 - 8m^2x\sqrt{3} + 3 + 4m\sqrt{3}x - 12m = 12$$

$$x^2 (3 + 4m^2) - 4m\sqrt{3}x(2m+1) + 12m^2 - 12m - 9 = 12$$

Per la tg. sarà Δ **= 0** nel nostro caso $\frac{\Delta}{4} = 0$ cioè :

$\left[2m\sqrt{3}(2m-1)\right]^2 -(3+4m^2)(12m^2-12m-9)=0$

$12m^2(4m^2-4m+1)-(36m^2-36m-27+48m^4-48m^3-36m^2)=0$

$48m^4-48m^3+12m^2-48m^4+48m^3+36m+27=0$

$12m^2+36m+27=0$

$4m^2+12m+9=0$

$m_{12}=\dfrac{-6\pm\sqrt{36-36}}{4}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$

sostituendo

$y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3}{2}(x-\sqrt{3})$

$2y-\sqrt{3}=-3x+3\sqrt{3}$

$2y+3x+4\sqrt{3}=0$

per omogeneità di formula in similitudine alle altre tangenti che si determineranno dividiamo per $4\sqrt{3}$ e razionalizziamo:

$\dfrac{2}{4\sqrt{3}}y+\dfrac{3}{4\sqrt{3}}x-1=0$

$\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\sqrt{3}}y+\dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\sqrt{3}}x=1$

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}y+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x=1$

Per la tangente in $B(-\sqrt{3};\dfrac{\sqrt{3}}{2})$ si può procedere analogamente, oppure, possiamo notare che i punti sono simmetrici e le tangenti sono tra di loro parallele con lo stesso coefficiente angolare, oppure per essere più immediati si può utilizzare la formula dello sdoppiamento:

$\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1$ e nel nostro caso dopo le sostituzioni abbiamo:

$\dfrac{x(-\sqrt{3})}{4}+\dfrac{y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}=1$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\bullet\dfrac{1}{3}y=1$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}x+\dfrac{\sqrt{3}}{6}y=1$

e con analoghi passaggi:

per la tangente in $C(-\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$\dfrac{x(-\sqrt{3})}{4}+\dfrac{y\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}=1$

$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}x-\dfrac{\sqrt{3}}{6}y=1$

per la tangente in $D(\sqrt{3};-\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

$\dfrac{x(\sqrt{3})}{4}+\dfrac{y\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3}=1$

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}x-\dfrac{\sqrt{3}}{6}y=1$

Ricerchiamo ora l'area del quadrilatero KLMN.
Per il calcolo si può procedere in svariati modi:

1) Determinare l’area di uno solo dei triangoli (es. KLO) che compongono il rombo, indi moltiplicare per 4;
2) Determinare l’area di metà del rombo (KLM) considerandolo un triangolo, calcolandone l’area con la formula di Sarrus, quindi moltiplicare per 2;
3) Il metodo più lungo consiste nell’intersecare le tangenti tra di loro , due a due e determinare i punti KLMN (sono punti simmetrici), quindi determinare la misura delle diagonali ed applicare la nota formula $As = \frac{d_1 \bullet d_2}{2}$

Ricerchiamo i punti d’intersezione, con una nota per velocizzare, consideriamo la retta per B e facciamone l’intersezione con gli assi; gli altri punti come detto sono simmetrici:

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y = 1$$

	x	y
K	0	$\frac{6}{\sqrt{3}}$
L	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	0
M	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	0
N	0	$\frac{6}{\sqrt{3}}$

1° modo) Area KLO

$$As(KLO) = \frac{B \bullet h}{2} = \frac{\frac{4}{\sqrt{3}} \bullet \frac{6}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{\frac{24}{3}}{2} = \frac{24}{3} \bullet \frac{1}{2} = 4$$

$$A_{rombo}(KLMN) = 4 \bullet As(KLO) = 4 \bullet 4 = 16$$

2° modo) Area KLM con Sarrus

$$A = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left[(x_1 y_2 1 + y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3) - (1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1)\right]$$

− − − + + +

e nel nostro caso:

$$A = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 0 & -\frac{6}{\sqrt{3}} & 1 & 0 & -\frac{6}{\sqrt{3}} \\ -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & -\frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 & 1 & \frac{4}{\sqrt{3}} & 0 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(0 \bullet 0 \bullet 1) + (-\frac{6}{\sqrt{3}} \bullet 1 \bullet \frac{4}{\sqrt{3}}) + (1 \bullet \frac{4}{\sqrt{3}} \bullet 0)\right] - \left[(-\frac{6}{\sqrt{3}} \bullet -\frac{4}{\sqrt{3}} \bullet 1) + (0 \bullet 1 \bullet 0) + (1 \bullet 0 \bullet \frac{4}{\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{24}{3} - (+\frac{24}{3}) \right] = \frac{1}{2}(-\frac{48}{3}) = |8|$$

$$A_{rombo}(KLMN) = 2 \bullet As(KLM) = 2 \bullet 8 = 16$$

3° modo) Ricerchiamo le misure delle diagonali con la formula della distanza tra due punti, o notando che essendo posizionati simmetricamente la misura è data dai valori OM e KO raddoppiati, quindi:

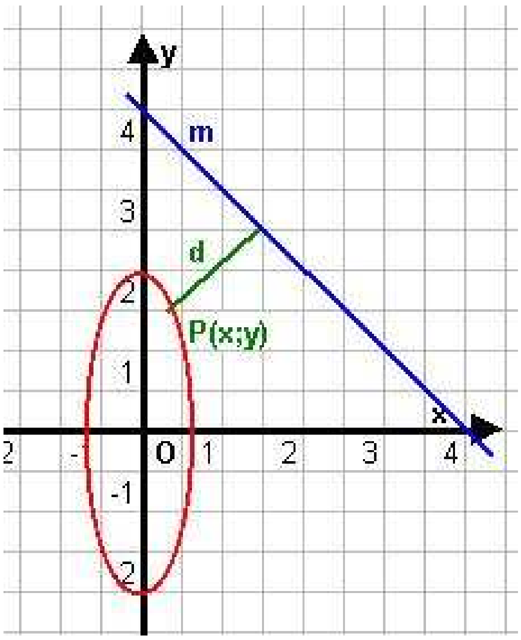
KN = 2 KO = 2 $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}}$

LM = 2 OM = 2 $\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$

$$A_{rombo}(KLMN) = \frac{\frac{12}{\sqrt{3}} \bullet \frac{8}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{12 \bullet 8}{3} \bullet \frac{1}{2} = \frac{48}{3} = 16$$

Problema 30

Dopo aver tracciato la curva di equazione $y = \sqrt{4 - 9x^2}$ determinare il punto di essa che ha distanza uguale a 2√2 dalla retta x + y – 4 = 0.



Per graficare la curva e capire la sua natura facciamo alcuni passaggi algebrici per scriverla in modo più consono per essere riconosciuta:

$$y = \sqrt{4 - 9x^2}$$
$$y^2 = 4 - 9x^2$$
$$y^2 + 9x^2 = 4$$
$$\frac{y^2}{4} + \frac{9}{4}x^2 = 1$$
$$\frac{y^2}{4} + \frac{9}{4}x^2 = 1$$
$$\frac{x^2}{\frac{4}{9}} + \frac{y^2}{4} = 1$$

E' un ellisse con $a = \pm\frac{2}{3}$ $b = \pm 2$

m) x + y – 4 = 0

m

Punto su	x	y
asse y	0	4
asse x	4	0

Il punto **P** ha coordinate P (x; $\sqrt{4-9x^2}$) appartenendo all'ellisse.
Applichiamo la formula della distanza retta punto :

$$d = \left|\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}\right|$$

e nel nostro caso sarà

$$\left|\frac{x + \sqrt{4-9x^2} - 4}{\sqrt{2}}\right| = 2\sqrt{2}$$

cioè

$$\left|x + \sqrt{4-9x^2} - 4\right| = 4$$

il valore assoluto comporta due possibilità

1^) $x + \sqrt{4-9x^2} - 4 = 4$

$$(\sqrt{4-9x^2})^2 = (8-x)^2$$
$$4 - 9x^2 = 64 + x^2 - 16x$$

equazione questa che ha un Δ < 0 la cui conclusione è : nessuna soluzione nel campo reale;

2^) $x + \sqrt{4-9x^2} - 4 = -4$

$$x + \sqrt{4-9x^2} = 0$$
$$x^2 = (-\sqrt{4-9x^2})^2$$
$$10x^2 = 4$$
$$x_{12} = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$$

ne consegue che per l'ordinata del punto P avremo:

$$y = \sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4 - 9\left(\frac{4}{10}\right)} = \sqrt{\frac{40-36}{10}} = \sqrt{\frac{4}{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$P(-\frac{2}{\sqrt{10}}; \frac{2}{\sqrt{10}})$$

N.B. il segno meno per il valore dell'ascissa è dettato dal fatto che è l'unico valore che verifica il valore assoluto della distanza 2√2

Verifichiamolo:

Valore positivo

$$\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{10}}+\sqrt{4-9\frac{4}{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{10}}+\sqrt{\frac{40-36}{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{10}}+\sqrt{\frac{4}{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{\frac{2}{\sqrt{10}}+\frac{2}{\sqrt{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|^2=(2\sqrt{2})^2$$

$$\frac{(\frac{4}{\sqrt{10}}-4)^2}{2}=8$$

$$(\frac{4}{\sqrt{10}}-4)^2=16$$

quantità mai verificata

Valore negativo

$$\left|\frac{-\frac{2}{\sqrt{10}}+\sqrt{4-9\frac{4}{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{-\frac{2}{\sqrt{10}}+\sqrt{\frac{40-36}{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{-\frac{2}{\sqrt{10}}+\sqrt{\frac{4}{10}}-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{-4}{\sqrt{2}}\right|=2\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{-4}{\sqrt{2}}\right|^2=(2\sqrt{2})^2$$

$$\frac{16}{2}=8$$

8 = 8

C.V.D.

L’IPERBOLE E LE SUE APPLICAZIONI

Problema 1

Stabilire per quali valori del parametro k l’equazione

$$\frac{x^2}{2k-4}+\frac{y^2}{k+1}=1$$

rappresenta un ellisse ed in particolare una circonferenza e per quale valori rappresenta una iperbole ed in particolare una iperbole equilatera.

Per stabilire quanto richiesto ci avvaliamo della definizione di eccentricità, cioè :

$e=\frac{c}{a}$ studiamone il segno avremo :

$\frac{c}{a}>1$ iperbole $\qquad \frac{c}{a}=1$ circonferenza $\qquad \frac{c}{a}<1$ ellisse

Basterà studiare il primo caso con $c^2 = a^2 + b^2$ e discutere il grafico, quindi in generale avremo:

$$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>1$$

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right)^2>(1)^2$$

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}-1>0$$

$$\frac{+b^2+a^2-a^2}{a^2}>0$$

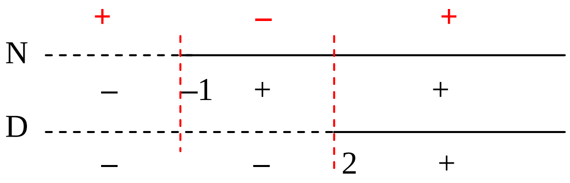
$$\frac{+b^2}{a^2}>0$$

e nel nostro caso

$$\frac{k+1}{2k-4}>0$$

$$\begin{array}{l} N \\ \\ D \end{array}\left\{\begin{array}{l} k+1>0 \quad \text{per } k>-1 \\ \\ 2k-4>0 \quad \text{per } k>2 \end{array}\right.$$

Grafico $\Rightarrow$



Discussione e conclusioni del grafico:

il segno del numeratore e del denominatore sono discordi con
$-1 < k < 0$ questo comporta che nell’espressione dell’equazione uno dei denominatori è negativo e saremo in presenza di una iperbole.

Inoltre saremo in presenza di una iperbole equilatera quando a = – b cioè :

2k – 4 = – (k + 1)
2k – 4 = – k – 1
2k + k = + 4 – 1
3k = + 3
k = 1

il segno del numeratore e del denominatore sono concordi con :
k > 2 questo comporta che nell'espressione dell'equazione saremo in presenza di coefficienti entrambi positivi, cioè una ellissi

Inoltre saremo in presenza di una circonferenza quando a = b cioè :
2k – 4 = k + 1
2k – k = 4 + 1
k = 5

k < – 1 non accettabile

Problema 2

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera in un sistema di assi cartesiani ortogonali che, riferita ai propri assi, stacca sulla retta 2x + y = 4 un segmento lungo $\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

L'equazione dell'iperbole è del tipo $x^2 - y^2 = a^2$.
Interseca la retta data nei punti dati dal sistema :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a^2 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4 - 2x \\ x^2 - (4 - 2x)^2 = a^2 \end{cases}$$

elaboriamo la seconda equazione
$x^2 - (16 - 16x + 4x^2) - a^2 = 0$
$x^2 - 16 + 16x - 4x^2 - a^2 = 0$
$-3x^2 - 16 + 16x - a^2 = 0$
$3x^2 - 16x + 16 + a^2 = 0$

$x_{12} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 3(a^2 + 16)}}{3} = \frac{8 \pm \sqrt{\Delta}}{3}$ consideriamo le soluzioni con $x_1 < x_2$

quindi:

$$y_{12} = 4 - 2\left(\frac{8 \pm \sqrt{\Delta}}{3}\right) = 4 + \left(\frac{-16 \pm 2\sqrt{\Delta}}{3}\right) = \frac{12 - 16 \pm 2\sqrt{\Delta}}{3} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{\Delta}}{3} = \frac{-2(2 \pm \sqrt{\Delta})}{3}$$

consideriamo le soluzioni con $y_1 < y_2$

Il segmento staccato di lunghezza $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ ha la formula $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Quindi uguagliando otterremo l'equazione risolvente:

$$x_2 - x_1 = \frac{8+\sqrt{\Delta}}{3} - \frac{8-\sqrt{\Delta}}{3} = \frac{1}{3}\left(8+\sqrt{\Delta}-8+\sqrt{\Delta}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{\Delta}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{-4-2\sqrt{\Delta}}{3} - \frac{-4+2\sqrt{\Delta}}{3} = \frac{1}{3}\left(-4-2\sqrt{\Delta}+4-2\sqrt{\Delta}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\Delta}$$

Consegue dall'applicazione della formula della distanza:

$$\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{\Delta}}{3}\right)^2 + \left(\frac{-4\sqrt{\Delta}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{\Delta}}{3}\right)^2 + \left(\frac{-4\sqrt{\Delta}}{3}\right)^2}\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)^2$$

$$\frac{4\Delta}{9} + \frac{16\Delta}{9} = \frac{16 \bullet 5}{9}$$

$$20\Delta = 16 \bullet 5$$

$$\Delta = \frac{16 \bullet 5}{20} = 4$$

Essendo

$64 - 3(a^2 + 16) = \Delta$ abbiamo

$64 - 3(a^2 + 16) = 4$

$-3(a^2 + 16) = 4 - 64$

$3(a^2 + 16) = 60$

$a^2 + 16 = 20$

$a^2 = 20 - 16 = 4$

$a = 2$

L'equazione dell'iperbole cercata è $x^2 - y^2 = 4$.

Problema 3

Determinare le equazioni delle rette tangenti all'iperbole $x^2 - 9y^2 = 9$ e parallele alla bisettrice 2° e 4° quadrante.

L'equazione della bisettrice 2° e 4° quadrante ha equazione $y = -x$ cioè $x + y = 0$.
L'equazione della generica retta parallela ha espressione $x + y + k = 0$ costituente un fascio improprio.
Per risolvere il problema poniamo a sistema la retta generica con l'iperbole, quindi imporremo la condizione di tangenza **$\Delta = 0$**.

$$\begin{cases} x^2 - 9y^2 = 9 \\ x + y + k = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -y - k \\ (-y-k)^2 - 9y^2 = 9 \end{cases}$$

elaboriamo solo la seconda equazione:

$(-y-k)^2 - 9y^2 = 9$

$y^2 + k^2 + 2ky - 9y^2 = 9$

$-8y^2 + 2ky + k^2 - 9 = 0$

$8y^2 - 2ky + 9 - k^2 = 0$

Imponiamo la condizione di tangenza:

$\Delta = 0$

$k^2 - 8(9 - k^2) = 0$
$k^2 - 72 + 8k^2 = 0$
$9k^2 - 72 = 0$
$9k^2 = 72$

$$k_{12} = \pm\sqrt{\frac{72}{9}} = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

ne consegue che le rette tangenti sono:

$$x + y \pm 2\sqrt{2} = 0$$

Problema 4

Determinare l'equazione dell'iperbole riferita ai suoi assi di simmetria , e aventi vertici V in (±1;0) e passante per il punto P(4; $\sqrt{5}$).

L'equazione della generica iperbole riferita ai suoi assi ha espressione $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Imponiamo il passaggio nel vertice e nel punto:

$$\begin{cases} V \quad \frac{1}{a^2} = 1 \\ P \quad \frac{16}{a^2} - \frac{5}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ -5 = b^2 - 16b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ -\frac{5}{b^2} = 1 - 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = 1 \\ 5 = 15b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b_{12} = \pm\sqrt{\frac{5}{15}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

Ne consegue che l'equazione cercata è: $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{3}} = 1$ cioè

$x^2 - 3y^2 = 1$

Problema 5

Determinare l'equazione dell'iperbole avente come asse focale l'asse x, come asintoti le rette $y = \pm\frac{3}{4}x$ e passante per il punto A(2;1).

I° modo) Le condizioni del testo si traducono nel sistema:

$$\begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{16} \\ \frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{b^2}{a^2} = \frac{9}{16} \\ \frac{4b^2 - a^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2} \end{cases}$$ essendo $a^2 \neq 0$ e $b^2 \neq 0$ ne consegue

$$\begin{cases} 16b^2 = 9a^2 \\ 4b^2 - a^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16b^2 - 9a^2 = 0 \\ -4 \quad 16b^2 + 4a^2 = -4a^2b^2 \end{cases}$$

$$// \qquad -5a^2 = -4a^2b^2$$

da cui

$$\begin{cases} b^2 = \dfrac{5}{4} \\ a^2 = \dfrac{20}{9} \end{cases}$$

e l’equazione dell’iperbole è : $\frac{9}{20}x^2 - \frac{4}{5}y^2 = 1$

II° modo) Sappiamo che l’equazione di una iperbole riferita ai suoi assi di simmetria è

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

e l’equazioni degli asintoti sono $y = \pm\frac{b}{a}x$

se ne concludeva che l’equazione degli asintoti si otteneva uguagliando a zero il primo membro dell’equazione dell’iperbole.

Da quanto detto possiamo, dall’equazione degli asintoti, eleva al quadrato i singoli elementi del 1° membro uguagliata ad un parametro da definire k:

$$y = \pm\frac{3}{4}x$$

$$\frac{3}{4}x - y = 0$$

$$\frac{9}{16}x^2 - y^2 = k$$

Imponendo il passaggio per il punto A(2;1) da cui:

$+\frac{9}{16}4 - 1 = k$ da cui $k = \frac{5}{4}$

e l’equazione dell’iperbole è : $\frac{9}{16}x^2 - y^2 = \frac{5}{4}$ moltiplicando il tutto per $\frac{4}{5}$ otteniamo l’eq. precedente.

Problema 6

Scritta l’equazione dell’iperbole equilatera traslate passante per l’origine degli assi e avente per asintoti le rette x = 1 e y = 1.
Determinare:

- **la traslazione mediante la quale l’equazione assume la forma xy = k.**
- **i punti della curva che hanno distanza uguale a $\sqrt{2}$ dalla retta x + y = 0.**

L'equazione dell'iperbole avrà forma

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

con asintoti $x = -\frac{d}{c}$ e $y = \frac{a}{c}$ che coincidono anche con le coordinate dell'origine traslata.
Da quanto scritto e per i dati del problema abbiamo:

$-\frac{d}{c} = 1 \;\Rightarrow\;$ d = – c $\qquad\qquad$ $\frac{a}{c} = 1 \;\Rightarrow\;$ a = c

inoltre sostituendo O(0,0) all'equazione data abbiamo:
$\frac{b}{d} = 0 \Rightarrow$ b = 0 quindi in definitiva si può scrivere:

$y = \frac{cx}{cx-c} = \frac{cx}{c(x-1)} = \frac{x}{x-1}$ equazione cercata

Determiniamo ora la traslazione :
dagli asintoti x = 1 e y = 1 cioé

x – 1= 0 e y – 1 = 0

si devono determinare i nuovi valori di x e y tali che l'equazione data si riferisca ai propri asintoti cioè x = 0 e y = 0 (xy = k), in definitiva

x = X +1 e y = Y + 1

sostituiamo negli asintoti

X +1 – 1= 0 e Y + 1 – 1 = 0
X = 0 e Y = 0 C.V.D.

Quindi la traslazione evidenziata è quella cercata, verifichiamolo ulteriormente :

$$Y+1 = \frac{X+1}{X+1-1}$$
$$X(Y+1) = X+1$$
XY +X = X+1
XY = 0 C.V.D

Determiniamo ora i punti P(x,y) della curva distanti $\sqrt{2}$ dalla retta x + y = 0.
I punti P avranno coordinate :
P(x,y) = P (x, $\frac{x}{x-1}$) dovendo soddisfare l'equazione data
Dalla formula della distanza

$$d = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \right|$$

e nel nostro caso:

$$\left|\frac{x+\dfrac{x}{x+1}}{\sqrt{2}}\right|=\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{x^2-x+x}{x-1}\right|=2$$

$$\frac{x^2}{x-1}=2 \quad \text{caso (a)}$$

$\left|\dfrac{x^2}{x-1}\right|=2$ il valore assoluto comporta

$$\frac{x^2}{x-1}=-2 \quad \text{caso (b)}$$

a) $x^2 = 2x - 2$
$x^2 - 2x + 2 = 0$
$x_{12} = 1 \pm \sqrt{1-2}$ non accettabile

b) $x^2 = -2x + 2$
$x^2 + 2x - 2 = 0$
$x_{12} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$ accettabile

I punti soddisfacenti la condizione sono quindi due di coordinate

Per $x_1 = -1-\sqrt{3}$ abbiamo con semplici passaggi algebrici e razionalizzando

$$y_1=\frac{x}{x-1}=\frac{-1-\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}-1}=\frac{-1-\sqrt{3}}{-2-\sqrt{3}}=\frac{+1+\sqrt{3}}{+2+\sqrt{3}}\bullet\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3}{4-3}=-1+\sqrt{3}=\sqrt{3}-1$$

Per $x_2 = -1+\sqrt{3}$ abbiamo con semplici passaggi algebrici e razionalizzando

$$y_2=\frac{x}{x-1}=\frac{-1+\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}}{-2+\sqrt{3}}\bullet\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}-2+3+2\sqrt{3}}{3-4}=\frac{1+\sqrt{3}}{-1}=-1-\sqrt{3}$$

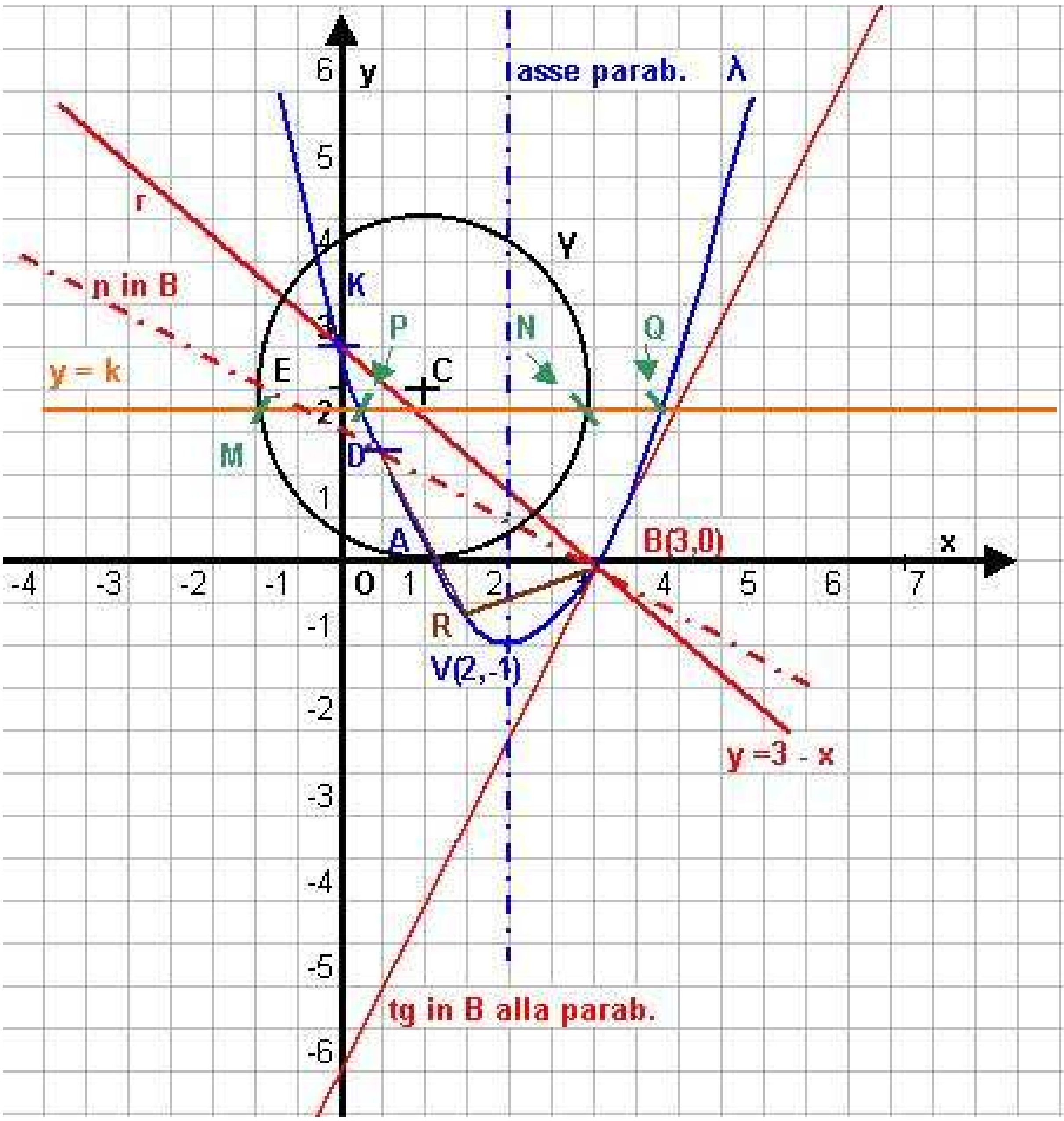
ESERCIZI IN CUI SONO PRESENTI PIU' CURVE E LORO RELAZIONI

Problema 1

Scrivere l'equazione della parabola λ con asse di simmetria parallelo all'asse delle y sapendo che ha vertice V(2;– 1), e passa per il punto A(1,0).
Indicare con B l'ulteriore punto di intersezione della parabola con l'asse delle x.
Condurre la normale n (cioè la perpendicolare alla tangente) in B alla curva, indicando con D l'ulteriore intersezione di n con la parabola.

Determinare sull'arco BD un punto R in modo che sia $\frac{15}{8}$ l'area del triangolo RBD.

Scrivere l'equazione della circonferenza γ sapendo che è tangente all'asse delle x, passa per E(– 1;2) e il suo centro appartiene alla retta di equazione x + y – 3 = 0.
Esistono due circonferenze che soddisfano queste condizioni: scegliere quella che giace nel semipiano positivo delle ordinate.
Una retta del tipo y = k interseca λ in P e Q e γ in M ed N. Determinare k in modo che sia MN = PQ.



- Ricerchiamo la parabola che è del tipo $y = ax^2 + bx + c$, lo faremo imponendo il passaggio per il vertice e il punto A dati, da cui il sistema:

$$\begin{array}{l} A \\ V_x \\ V_y \end{array} \begin{cases} a + b + c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b = -4a \\ b^2 - 4ac = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ a - 4a + c = 0 \\ 16a^2 - 4ac = 4a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4a \\ c = 3a \\ 16a^2 - 4a(3a) = 4a \end{cases}$$

Elaboriamo la terza
$16a^2 - 12a^2 - 4a = 0$
$4a^2 - 4a = 0$

$a(a-1) = 0 \quad \begin{cases} \nearrow a = 0 \\ \searrow a = 1 \end{cases}$

ne consegue
per $a = 0 \quad c = 0 \quad b = 0$
per $a = 1 \quad c = 3 \quad b = -4$

da cui l'equazione della parabola **$y = x^2 - 4x + 3$**
Determiniamo il punto B d'intersezione della parabola con l'asse delle x :

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_{12} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1 = \begin{cases} \nearrow x_1 = 1 \quad \text{da cui ritroviamo } A(1;0) \\ \searrow x_2 = 3 \quad \mathbf{B(3;0)} \text{ punto cercato} \end{cases}$

Ricerca tangente in B(3,0) dall'equaz. $y - y_0 = m(x - x_0)$ da cui:
$y - 0 = m(x - 3)$
$y = m(x - 3)$
Impostiamo il sistema con la parabola trovata

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ y = m(x - 3) \end{cases}$$

sostituiamo la seconda nella prima
ed elaboriamo quest'ultima
$x^2 - 4x + 3 = m(x - 3)$
$x^2 - 4x + 3 = mx - 3m$
$x^2 - 4x + 3 - mx + 3m = 0$
$x^2 - x(4 + m) + 3 + 3m = 0$
La cond. di tangenza è $\Delta = 0$
cioè $b^2 - 4ac = 0$ quindi
$(4+m)^2 + 4(3+3m) = 0$

$16 + 8m + m^2 - 12 - 12m = 0$
$m^2 - 4m + 4 = 0$
$(m - 2)^2 = 0$
$m = 2$
Concludendo dall'equaz. generica
$y = m(x - 3)$ abbiamo :
$y = 2(x - 3)$
$y = 2x - 6$
$y - 2x + 6 = 0$

La normale n in B (3,0) avrà il coefficiente angolare pari all'antireciproco cioè m' = $-\frac{1}{m} = -\frac{1}{2}$

Conseguentemente l'equazione della normale cercata ha espressione:

$$y = -\frac{1}{m}(x-3)$$

$$y = -\frac{1}{2}(x-3)$$

$$2y = -x + 3$$

$$2y + x - 3 = 0$$

Ricerca del punto D, intersezione della normale n con la parabola λ, mettiamole a sistema :

$$2\begin{cases} y = x^2 - 4x + 3 \\ 2y + x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = 2x^2 - 8x + 6 \\ 2y = -x + 3 \end{cases}$$

sostituiamo la seconda nella prima ed elaboriamo quest'ultima:

$2x^2 - 8x + 6 = -x + 3$

$2x^2 - 8x + 6 + x - 3 = 0$

$2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{7+5}{4} = 3 \end{cases}$$

Per $x_2 = 3$ ritroviamo il punto B(3,0)

Per $x_2 = \frac{1}{2}$ abbiamo

$$y = \frac{1}{4} - \frac{4}{2} + 3 = \frac{1-8+12}{4} = \frac{5}{4}$$

Conseguentemente le coordinate del punto sono $D(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$

Determiniamo ora il punto R di ascissa generica z appartenente all'arco BD della parabola λ e quindi di ordinata che gli compete $y_z = z^2 - 4z + 3$, i punti del triangolo hanno coordinate:

$R(z; z^2 - 4z + 3)$ B(3;0) $D(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$

Gli estremi dell'arco ci impongono le limitazioni $\frac{1}{2} < z < 3$ e $\frac{5}{4} < y_z < -1$

Dall'applicazione della condizione richiesta avremo $A_s(RBD) = \frac{15}{8}$

applicazione della formula matriciale di Sarrus:

Inserite le tre coordinate dei vertici del triangolo per righe, inserire una colonna di termini unitari, ripetendo quindi le tre coordinate dei punti, e procedere come nello schema sottostante:

$$A = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left[(x_1y_2 1 + y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3) - (1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1)\right]$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Da cui nel nostro caso:

A_s(RBD)=

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 3 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{4} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{5}{4} \\ z & z^2-4z+3 & 1 & z & z^2-4z+3 \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\left\{\left[\frac{15}{4}+0+\frac{z^2-4z+3}{2}\right]-\left[\frac{5z}{4}+3\left(z^2-4z+3\right)+0\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{15}{4}+\frac{z^2-4z+3}{2}-\frac{5z}{4}-3\left(z^2-4z+3\right)\right]$$

Da cui:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{15}{4}+\frac{z^2-4z+3}{2}-\frac{5z}{4}-3\left(z^2-4z+3\right)\right]=\frac{15}{8}$$

$$\frac{15}{4}+\frac{z^2-4z+3}{2}-\frac{5z}{4}-3\left(z^2-4z+3\right)=\frac{15}{4}$$

$$\frac{z^2-4z+3}{2}-\frac{5z}{4}-3\left(z^2-4z+3\right)=0$$

$2z^2 – 8z + 6 – 5z\ 12z^2 – 48z – 36 = 0$

$–10z^2 + 35z – 30 = 0$

$2z^2 – 7z + 6 = 0$

$$z_{12}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{4}= \quad z_1=\frac{7-1}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2} \qquad z_2=\frac{7+1}{4}=\frac{8}{4}=2$$

Per $z_1 = \frac{3}{2}$ si ha $y_z = z^2 – 4z + 3 = \frac{9}{4}-4\bullet\frac{3}{2}+3=\frac{9-24+3}{4}=-\frac{12}{4}=–3$

Per $z_2 = \frac{3}{2}$ si ha $y_z = z^2 – 4z + 3 = 4 – 8 + 3 = –1$

Concludendo:

$R_1(\frac{3}{2};-3)$ non accettabile per la condizione $\frac{5}{4} < y_z < -1$

$R_2(2 ; –1)$ accettabile coincidente con il vertice della parabola.

Ricerchiamo l'equazione della circonferenza del tipo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$.

Per impostare il sistema risolvente di tre incognite in tre equazioni avremo
a) imporre il passaggio per E(–1;2)
la circonferenza è tangente all'asse delle x di equazione y = 0
l'ultima condizione ci è data dal fatto che C appartiene alla retta x + y – 3 = 0. E' chiaro altresì che il centro giace anche sulla perpendicolare al punto di tangenza sull'asse x (coincidente con il raggio.

a) I^ equaz. passaggio per E(– 1;2) : 1 + 4 – a + 2b + c = 0 cioè **5 – a + 2b + c = 0**
b) II^ equaz. ; sappiamo che la circonferenza **γ** è tangente all'asse delle x di eq. y = 0 quindi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui dopo la sostituzione

$x^2 + ax + c = 0$ e dalla condizione di tangenza $\Delta = 0$ cioè $b^2 - 4ac = 0$ si ha

$a^2 - 4c = 0$ quindi : $a = \pm 2\sqrt{c}$

c) Infine l'ultima condizione ci è data dal fatto che il centro C appartiene alla retta $x + y - 3 = 0$.
È, altresì, chiaro che il centro giace anche sulla perpendicolare al punto di tangenza sull'asse x.

Il punto generico di contatto avrà coordinate $S(x_S,0)$, ed il centro sarà dato dall'intersezione delle due rette

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x = x_S \quad \text{retta // alla y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_S \\ y_S = 3 - x_S \end{cases}$$ da cui le coordinate generiche del centro $C(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}) = (x_S;3 - x_S)$

Inoltre l'eq. generica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ essendo noto il valore di $a \pm 2\sqrt{c} = 0$, cioè

per la parte negativa $a - 2\sqrt{c} = 0$ e

per quella positiva $a + 2\sqrt{c} = 0$ quindi $a = -2\sqrt{c}$

e avremo

$$\begin{cases} a = -2\sqrt{c} \\ x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad \text{sostituendo} \end{cases}$$

$x^2 + y^2 - 2\sqrt{c}\,x + by + c = 0$ imponendo il passaggio per il punto $S(x_S,0)$,

$x_S^2 - 2\sqrt{c}\,x_S + c = 0$

$x_{S12} = \sqrt{c} \pm \sqrt{c - c} = \sqrt{c}$

Se ne deduce che $C(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}) = (x_S;3 - x_S) = (\sqrt{c};3 - \sqrt{c})$ da cui il sistema risolvente

$$\begin{cases} 5 - a + 2b + c = 0 \\ a = -2\sqrt{c} \quad \text{già utilizzata e ritrovata} \\ -\frac{b}{2} = 3 - \sqrt{c} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - a + 2b + c = 0 \\ a = -2\sqrt{c} \\ \frac{b}{2} = \sqrt{c} - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -2\sqrt{c} \\ b = 2\sqrt{c} - 6 \\ 5 - a + 2b + c = 0 \quad \text{sostituiamo ed elaboriamo l'ultima} \end{cases}$$

$5 + 2\sqrt{c} + 2(2\sqrt{c} - 6) + c = 0$

$5 + 2\sqrt{c} + 4\sqrt{c} - 12 + c = 0$

$6\sqrt{c} + c - 7 = 0$

$(6\sqrt{c})^2 = (7 - c)^2$

$36c = 49 - 14c + c^2$

$49 - 14c + c^2 - 36c = 0$

$c^2 - 50c + 49 = 0$

$$c_{12} = 25 \pm \sqrt{625 - 49} = 25 \pm \sqrt{576} = 25 \pm 24 = \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 49 \end{cases}$$

Ne consegue:

$\begin{cases} c_1 = 1 \\ a = -2 \\ b = -4 \end{cases}$ da cui l'eq. della circonferenza $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0}$ **Eq. cercata**

$1 + 4 + 2 - 8 + 1 = 0$ pass. per E(– 1;2)

$\begin{cases} c_2 = 49 \\ a = -14 \\ b = 20 \end{cases}$ da cui l'eq. della circonferenza $x^2 + y^2 - 14x + 20y + 49 = 0$

$1 + 4 + 14 + 32 + 49 \neq 0$ non pass. per E(– 1;2)

Basterà verificare il passaggio per E , o cercarne il centro $C(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2})$, solo la prima soddisfa le condizioni.

La parabola λ interseca $y = k$ in $P(x_P;k)$ e $Q(x_Q;k)$ mentre

La circonferenza γ interseca $y = k$ in $M(x_M;k)$ e $N(x_N;k)$

Dovrà essere MN = PQ, ed essendo i punti posti sull'orizzontale basterà fare la differenza delle ascisse. Quindi :

1) dalla parabola λ si ha:

$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$

Sostituendo ed elaborando si ha

$x^2 - 4x + 3 - k = 0$

$$x_{12} = 2 \pm \sqrt{4 - (3 - k)} = 2 \pm \sqrt{1 + k} = \begin{cases} x_P = 2 - \sqrt{1 + k} \\ x_Q = 2 + \sqrt{1 + k} \end{cases}$$

$PQ = x_Q - x_P = 2 + \sqrt{1 + k} - 2 + \sqrt{1 + k} = 2\sqrt{1 + k}$

2) dalla circonferenza γ si ha:

$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 \end{cases}$

Sostituendo ed elaborando si ha

$x^2 + k^2 - 2x - 4k + 1 = 0$

$$x_{12} = 1 \pm \sqrt{1-(k^2-4k+1)} = 1 \pm \sqrt{1-k^2+4k-1} = 1 \pm \sqrt{4k-k^2} = \begin{cases} x_M = 1-\sqrt{4k-k^2} \\ x_N = 1+\sqrt{4k-k^2} \end{cases}$$

$$MN = x_N - x_M = \quad 1+\sqrt{4k-k^2} - 1 + \sqrt{4k-k^2} = 2\sqrt{4k-k^2}$$

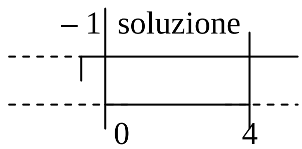
Da cui essendo PQ = MN abbiamo

$2\sqrt{1+k} = 2\sqrt{4k-k^2}$ equazione irrazionale

prima di svolgerla vediamone le condizioni, dai radicandi abbiamo:

$$\begin{cases} 1+k>0 \\ -k^2+4k>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k>-1 \\ k^2-4k<0 \quad a>0 \;\; f(k)<0 \;\; \Delta>0 \;\; \text{verificata per valori interni } 0<k<4 \end{cases}$$



La condizione è riscontrabile anche geometricamente in quanto y = k interseca la γ fino all'ordinata massima che è pari a y = 4; tangente alla γ.

Risolviamo

$(2\sqrt{1+k})^2 = (2\sqrt{4k-k^2})^2$

$4k - k^2 = 1 + k$

$4k - k^2 - 1 - k = 0$

$-4k + k^2 + 1 + k = 0$

$k^2 - 3k + 1 = 0$

$$k_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} k_1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}38 \\ k_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2{,}61 \end{cases}$$

Valori ambedue accettabili perchè entro i limiti.

Verifichiamolo con uno dei due valori ad esempio con k_2.

$$(PQ)^2 = (2\sqrt{1+k})^2 = 4\left(\frac{2+3+\sqrt{5}}{2}\right) = 10+2\sqrt{5}$$

$$(MN)^2 = (2\sqrt{4k-k^2})^2 = 4\left[4\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right] = 4\left[2\left(3+\sqrt{5}\right) - \left(\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4}\right)\right] =$$

$$= 4\left[\frac{24+8\sqrt{5}-14-6\sqrt{5}}{4}\right] = 10+2\sqrt{5}$$

Problema 2

Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse delle y, vertice V(1;2) e passante per il punto T(– 1;0).
Verificare che la parabola è tangente alla retta r) y = – 4x + 14 e determinare le coordinate del punto A di contatto.

Scrivere l'equazione della circonferenza che ha per corda il segmento BC, con B($2;-\frac{1}{2}$) e C($0;-\frac{1}{2}$), e il centro sulla retta s) y = $\frac{1}{2}$x.
Se D è il punto d'intersezione della parabola con l'asse y, determinare sull'arco di parabola, situato nel 1° quadrante un punto P in modo che il rapporto tra la somma delle aree dei triangoli ODP e PCB e l'area del triangolo ACD sia $\frac{k}{5}$ (k∈ R_o^+), essendo O l'origine degli assi.
Determinare inoltre i punti comuni alla parabola e alla circonferenza.

Ricerca della parabola del tipo y = ax^2 + bx + c con le seguenti caratteristiche
$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)=(1,2)$ e passante per il punto T(-1;0) da cui il sistema:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ -\frac{\Delta}{4a} = 2 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -b = 2a \\ -b^2 + 4ac = 8a \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ -(-2a)^2 + 4ac = 8a \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ a + 2a + c = 0 \\ 4a^2 + 4ac = 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -3a \\ -4a^2 + 4a(-3a) = 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -3a \\ -4a^2 - 12a^2 = 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -3a \\ -4a^2 - 12a^2 - 8a = 0 \end{cases}$$

Risolviamo l'ultima equazione
$16a^2 + 8a = 0$
$8a\,(2a + 1) = 0$

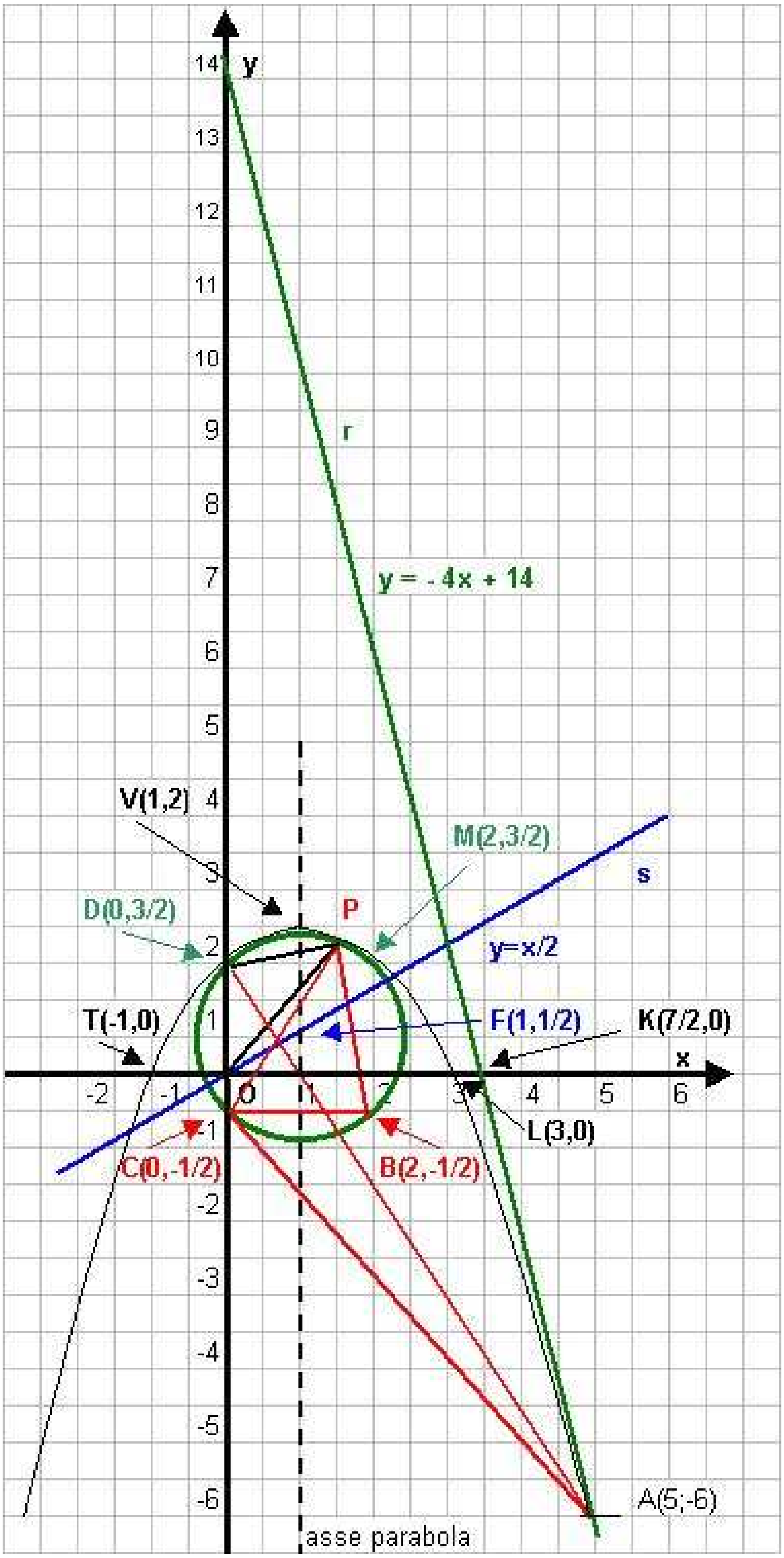
Per a = 0 b = 0 c = 0 non è una parabola
Per a = – 1/2 b = 1 c = 3/2 da cui si ha:

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$

Intersezioni
per x = 0 y = 3/2
per y = 0 si ha
$-x^2 + 2x + 3 = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x_{12} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Punti d'intersezione:
D(0; 3/2)
L(3;0)



Retta r)
$y = -4x + 14$

r	
x	**y**
0	**14**
7/2	**0**

Retta s)
$y = x/2$

s	
x	**y**
0	**0**
1	**1/2**

Calcoliamo il punto di tangenza tra la retta r e la parabola ottenuta, impostiamo il sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \\ y = -4x + 14 \end{cases}$$

sostituiamo ed elaboriamo l'equazione così ottenuta:

$$-4x + 14 =$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$$
$$-\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{3}{2} - 14 = 0$$
$$-\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{3-28}{2} = 0$$
$$-x^2 + 10x - 25 = 0$$
$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$x_{12} = 5 \pm \sqrt{25-25} = 5$$

da cui
$y = -4x + 14 = -20 + 14 = -6$ e il punto d'intersezione è
A (5; – 6).

Ricerchiamo ora l'equazione della circonferenza ed eventuali punti di contatto:

Considerazioni:

conosciamo i punti estremi della corda BC, B($2;-\frac{1}{2}$) e C($0;-\frac{1}{2}$),

inoltre l'asse della parabola x = 1 è anche asse del segmento dato infatti BC = 2 – 0 = 2 da cui asse = BC/2 = 1.

L'intersezione tra l'asse e la retta s) y = x/2 fornisce le coordinate del centro F

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = x/2 \end{cases}$$ da cui **F(1; 1/2)**

inoltre $r = \sqrt{(x_F - x_C)^2 + (y_F - y_C)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$

Quindi applicando la $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ abbiamo $(x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 2$ circonferenza cercata.

Gli eventuali punti di contatto tra la parabola e la circonferenza sono dati dal sistema:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \\ (x-1)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -x^2 + 2x + 3 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -2y + 3 \\ -2y + 3 + 1 + y^2 - y + \frac{1}{4} - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -2y + 3 \\ -3y + 2 + y^2 + \frac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

elaboriamo l'ultima

$-12y + 8 + 4y^2 + 1 = 0$

$4y^2 - 12y + 9 = 0$

$$y_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{3}{2}$$

ne consegue che

$x^2 - 2x = -2y + 3$

$x^2 - 2x = -2 \bullet \frac{3}{2} + 3$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

cioè x = 0 e x = 2

Da cui i punti : D ($0;\frac{3}{2}$) ed M ($2;\frac{3}{2}$)

Ricerchiamo ora il punto generico **P** (I° quadrante) tale che $\frac{A_S(ODP) + A_S(PCB)}{A_S(ACD)} = \frac{k}{5}$

Il punto P ha coordinate P(K; $-\frac{1}{2}K^2 + K + \frac{3}{2}$) appartenendo alla parabola.

Vediamo di calcolare le singole aree con Sarrus:

area A_S(ODP) con D(0; 3/2)**,** O(0;0) e P(K; $-\frac{1}{2}K^2 + K + \frac{3}{2}$) da cui

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{matrix}\right\| =\frac{1}{2}\left[\left(x_1 y_2 1+ y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3\right)-\left(1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1\right)\right]$$

$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$

Da cui nel nostro caso:

$A_S(ODP)=$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ K & -\frac{1}{2}K^2+K+\frac{3}{2} & 1 & K & -\frac{1}{2}K^2+K+\frac{3}{2} \end{matrix}\right\| =\frac{1}{2}\left[0+(\frac{3}{2}\bullet 1\bullet K)+0-\left(0+0+0\right)\right]=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}K)=\frac{3}{4}K$$

area $A_S(PCB)$ con C(0; -1/2**)**, B(2;-1/2) e P(K; $-\frac{1}{2}K^2+K+\frac{3}{2}$) da cui

$$A_S(PCB)=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 2 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ K & -\frac{1}{2}K^2+K+\frac{3}{2} & 1 & K & -\frac{1}{2}K^2+K+\frac{3}{2} \end{matrix}\right\| =$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(2\bullet -\frac{1}{2}\bullet 1\right)+\left(-\frac{1}{2}\bullet 1\bullet K\right)+0\right]-\left[\left(K\bullet -\frac{1}{2}\bullet 1\right)+\left(2\bullet -\frac{K^2}{2}+K+\frac{3}{2}\bullet 1\right)+\left(-\frac{1}{2}\bullet 1\bullet 0\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(-1-\frac{K}{2}\right)\right]-\left[\left(-\frac{K}{2}\right)+\left(-K^2+2K+3\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left[-1-\frac{K}{2}+\frac{K}{2}+K^2-2K-3\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(+K^2-2K-4\right)=\frac{K^2}{2}-K-2$$

area $A_S(ACD)$ con A(5; - 6), C(0;-1/2) e D(0;-3/2) da cui

$$A_S(PCB)=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 5 & -6 & 1 & 5 & -6 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & +\frac{3}{2} & 1 & 0 & +\frac{3}{2} \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(5\bullet -\frac{1}{2}\bullet 1\right)+\left(-6\bullet 1\bullet 0\right)+\left(1\bullet 0\bullet \frac{3}{2}\right)\right]-\left[\left(0\bullet -\frac{1}{2}\bullet 1\right)+\left(\frac{3}{2}\bullet 1\bullet 5\right)+\left(1\bullet 0\bullet -6\right)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left[\left(-\frac{5}{2}\right)\right]-\left[+\left(\frac{15}{2}\right)\right]\right\}=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(\frac{15}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(-\frac{20}{2}\right)=-5=|5|$$

Inizio discussione:

$$\frac{A_S(ODP)+A_S(PCB)}{A_S(ACD)}=\frac{k}{5}$$

Con rispettivamente :

A_S(ACD) = 5 A_S(ODP) = $\frac{3k}{4}$ e A_S(PCB) = $\frac{K^2}{2} - K - 2$

Nel I° quadrante si ha $\begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 2 \le y \le 0 \end{cases}$

Se P≡ D(0, $\frac{3}{2}$) A_S(ODP)= 0 ed il rapporto aree diventa $\frac{A_S(PCB)}{A_S(ACD)} = \frac{k}{5}$

Essendo A_S(PCB)= $\frac{B \bullet h}{2} = \frac{(1{,}5 + 0{,}5) \bullet 2}{2} = 2$ cioè $\frac{2}{5} = \frac{k}{5}$ da cui **k =2**

Se P≡ L(0,3) il rapporto aree $\frac{A_S(ODP) + A_S(PCB)}{A_S(ACD)} = \frac{k}{5}$ diventa,

essendo A_S(ODP) = $\frac{B \bullet h}{2} = \frac{3 \bullet \frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}$ e A_S(PCB) = $\frac{B \bullet h}{2} = \frac{2 \bullet \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}}{5} = \frac{k}{5}$ cioè $k = \frac{9+2}{4} = \frac{11}{4}$

Nella posizione generica della figura le aree, rispettivamente quella relativa al triangolo ODP avrà come altezza la variabile x; mentre quella relativa al triangolo CBP avrà come altezza la variabile (y + $\frac{1}{2}$). Quindi le aree generiche in funzione delle variabili saranno:

A_S(ODP) = $\frac{B \bullet h}{2} = \frac{\frac{3}{2} \bullet x}{2} = \frac{3x}{4}$ e A_S(PCB) = $\frac{B \bullet h}{2} = \frac{2 \bullet (y + \frac{1}{2})}{2} = y + \frac{1}{2}$

Da cui l'espressione del testo diventa:

$$\frac{A_S(ODP) + A_S(PCB)}{A_S(ACD)} = \frac{\frac{3x}{4} + (y + \frac{1}{2})}{5} = \frac{k}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{3x}{4} + y + \frac{1}{2} = k$$

In definitiva si tratterà di ricercare le intersezioni tra una funzione il cui diagramma è opportunamente limitato in base alle condizioni delle variabili e un fascio di rette, da cui il sistema:

$$\begin{cases} \frac{3x}{4} + y + \frac{1}{2} = k \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = k - \frac{1}{2} - \frac{3x}{4} \\ k - \frac{1}{2} - \frac{3x}{4} = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Elaboriamo la II^ equazione

$$\frac{1}{2}x^2 + k - \frac{1}{2} - \frac{3x}{4} - x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{7x}{4} + k - 2 = 0$$

$2x^2 - 7x - 8 + 4k = 0$

Equazione che per ammettere soluzioni reali dovrà avere $\Delta = b^2 - 4ac \ge 0$ cioé

$49 - 8(4k - 8) \ge 0$

$49 - 32k + 64 \ge 0$

$-32k \ge -113$

$k \le \frac{113}{32}$

Metodo del confronto delle radici di una equazione parametrica di II° grado con due numeri, o meglio discussione di un sistema misto con Tartinville:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7x - 8 + 4k = 0 \quad \text{con } k = \text{n° reale} \\ 0 \le x \le 3 \quad \text{e} \quad \Delta \ge 0 \quad \text{per } k \le \dfrac{113}{32} \end{cases}$$

Studio del segno del I° coefficiente : $2 > 0$ sempre verificata

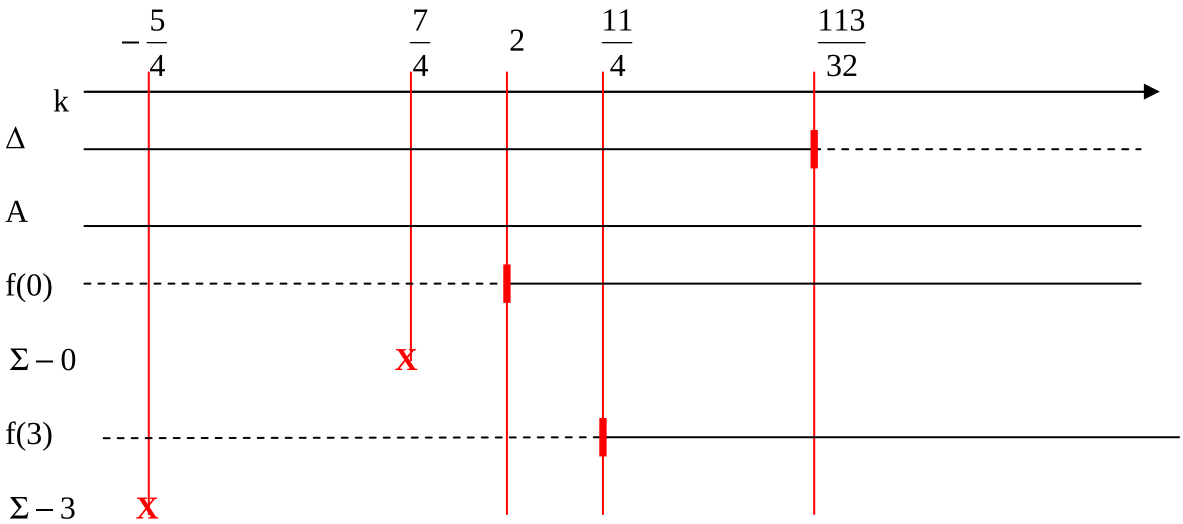
Studio del segno di f(0) : $-8 + 4k \ge 0 \qquad 4k \ge 8 \qquad k \ge 2$

Studio del segno di f(3) : $18 - 21 - 8 + 4k \ge 0 \qquad -11 + 4k \ge 0 \qquad k \ge \dfrac{11}{4}$

Studio del segno dell'espressione $\Sigma - 0 = -\dfrac{b}{2a} - 0$: cioè $\dfrac{7}{4} > 0$

Studio del segno dell'espressione $\Sigma - 3 = -\dfrac{b}{2a} - 3$: cioè $\dfrac{7}{4} - 3 = \dfrac{7-12}{3} = -\dfrac{5}{4} < 0$

Graficando



Il metodo di **Tartinville** qui applicato sui seguenti tre teoremi che confrontano le radici dell'equazione parametrica con i valori 0 e 3 (le dimostrazioni si rimandano ai testi specifici), qui ci limiteremo ad enunciarli e ad applicarli:

I° Teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perché il sistema del tipo

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ \alpha \le x \le \beta \end{cases}$$

abbia una sola soluzione ordinaria è che le funzioni f(α) e f(β) siano discordi.

Tale soluzione sarà la minore delle due radici dell'equazione se risulterà

a f(α) > 0 e a f(β) < 0

sarà la maggiore se i segni sono opposti.

II° Teorema
Condizione necessaria e sufficiente perché il precedente sistema misto abbia due soluzioni ordinarie distinte e coincidenti è che sia verificato il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ a\ f(\alpha) > 0 \\ a\ f(\beta) > 0 \\ \alpha < \Sigma < \beta \end{cases}$$

L'ultima condizione corrisponde evidentemente a:

$$\begin{cases} \Sigma > \alpha \\ \Sigma < \beta \end{cases} \quad \text{Cioè} \quad \begin{cases} \Sigma - \alpha > 0 \\ \Sigma - \beta < 0 \end{cases}$$

III° Teorema
Per ogni valore del parametro che annulla una delle due funzioni si ha la soluzione limite:

$x = \alpha$ se $f(\alpha) = 0$
$x = \beta$ se $f(\beta) = 0$

l'altra radice dell'equazione sarà soluzione ordinaria se la funzione che non si annulla è concorde con il 1° coefficiente e se il Σ è compreso tra α e β (cioè siano contemporaneamente $\Sigma - \alpha > 0$ e $\Sigma - \beta < 0$) .

Concludendo nel nostro caso:

$k = 2$ $\Delta > 0$ le due funzioni $a\ f(0) > 0$ e $a\ f(3) < 0$ sono discordi (I° Teor.).
Una soluzione , tale soluzione sarà la minore delle due radici.

$2 < k < \frac{11}{4}$ $\Delta > 0$ le due funzioni $a\ f(0) > 0$ e $a\ f(3) < 0$ sono discordi (I° Teor.).
Una soluzione , tale soluzione sarà la minore delle due radici.

$k = \frac{11}{4}$ $\Delta > 0$ le due funzioni $a\ f(0) > 0$ e $a\ f(3) > 0$ sono concordi (II° Teor.).
essendo $\Sigma = \frac{7}{4}$ compreso tra $0 < \Sigma < 3$, avremo due soluzioni ordinarie e distinte o coincidenti.

$\frac{11}{4} < k < \frac{113}{32}$ $\Delta > 0$ le due funzioni $a\ f(0) > 0$ e $a\ f(3) > 0$ sono concordi (II° Teor.).
essendo $\Sigma = \frac{7}{4}$ compreso tra $0 < \Sigma < 3$, avremo ancora due soluzioni.

$k > \frac{113}{32}$ $\Delta < 0$ le radici sono complesse coniugate: nessuna soluzione.

Risolviamo ora il sistema misto con il metodo grafico.
L'equazione trovata $2x^2 - 7x - 8 + 4k = 0$ con $0 \le x \le 3$ costituisce un sistema misto. Indicando con k il parametro di discussione, se quest'ultimo figura al I° grado, sarà sempre possibile risolvere l'equazione parametrica rispetto ad esso ottenendo la funzione algebrica razionale k = f(x) e, ponendo y = k avremo il sistema risolvente:

$$\begin{cases} y = k \\ y = f(x) \end{cases}$$

In definitiva si tratterà di ricercare le intersezioni tra:
- una funzione il cui diagramma dovrà essere opportunamente limitato in base alle condizioni imposte alla variabile x;
- un fascio di rette parallele all'asse delle x.

Quindi

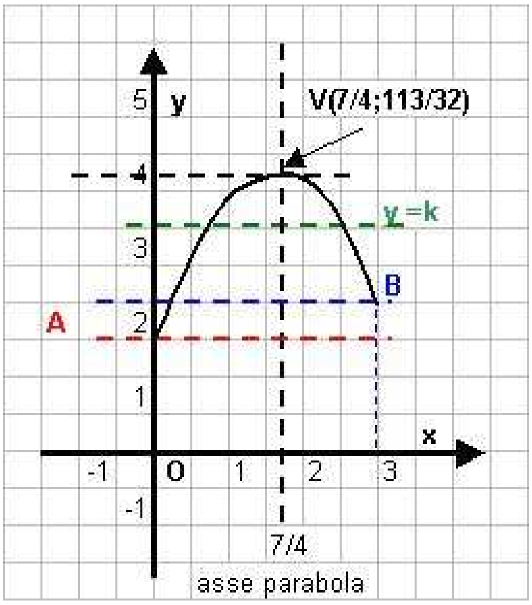
$$\begin{cases} y = k \\ -4k = 2x^2 - 7x - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = k \\ k = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{4}x + 2 \end{cases}$$

Rappresentiamo le curve

$y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{7}{4}x + 2$ in $0 \le x \le 3$ e la retta y = k parallela all'asse x

	parabola	
	x	**y**
A	**0**	**2**
B	**3**	**11/4 = 2,75**



$$V \equiv \left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{7}{4},\frac{113}{32}\right) = (1{,}75;3{,}53)$$

tralasciamo i conteggi algebrici di facile risoluzione per rappresentare il grafico e le soluzioni:

per $2 \le k \le \dfrac{11}{4}$ una soluzione

per $\dfrac{11}{4} \le k \le \dfrac{113}{32}$ due soluzioni

Problema 3

Data l'equazione $y = ax^2 + bx + c$
Determinare a, b, c, in modo che la parabola che essa rappresenta passi per i punti A (0; – 6), B(6;0) e nel punto B sia tangente alla retta di coefficiente angolare – 5 .
Determinare per i vertici del rettangolo inscritto nel segmento parabolico limitato dalla parabola e dall'asse x ed avente perimetro uguale a 14,5, l'area A_s della sua superficie e l'equazione della circonferenza ad esso circoscritta.

Impostiamo il sistema risolvente per il calcolo dei coefficienti, determinando prima il $\Delta = 0$ della retta tangente alla parabola:

$y - y_0 = m (x - x_0)$ punto di tangenza B(6;0) per cui $y - 0 = -5 (x - 6)$

$$\begin{cases} y = -5x + 30 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$$ sostituiamo ed elaboriamo imponendo il $\Delta = 0$

$-5x + 30 = ax^2 + bx + c$
$ax^2 + x (5 +b) + c - 30 = 0$
$\Delta = 0 \quad b^2 - 4ac = 0$ cioè
$(5 +b)^2 - 4a(c - 30) = 0$ condizione cercata, che andrà inserita nel sistema risolvente:

$$\begin{array}{l} \Delta = 0 \\ \text{Per A} \\ \text{Per B} \end{array} \begin{cases} (5 +b)^2 - 4a(c - 30) = 0 \\ c = -6 \\ 36a + 6b + c = 0 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c = -6 \\ 6b = -c - 36a \\ (5 +b)^2 - 4a(c - 30) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -6 \\ b = 1 - 6a \\ 25 +b^2 + 10b - 4a (-36) = 0 \end{cases}$$

elaboriamo quest'ultima
$25 +b^2 + 10b + 144a = 0$
$(1 - 6a)^2 + 10 (1- 6a) + 144a + 25 = 0$
$1 + 36a^2 - 12a + 10 - 60a + 144a + 25 = 0$
$36a^2 + 72a + 36 = 0$
$a^2 + 2a + 1 = 0$
$(a + 1)^2 = 0$

$a = -1$ conseguentemente

$$\begin{cases} a = -1 \\ c = -6 \\ b = 1 - 6a = 1 + 6 = 7 \end{cases}$$

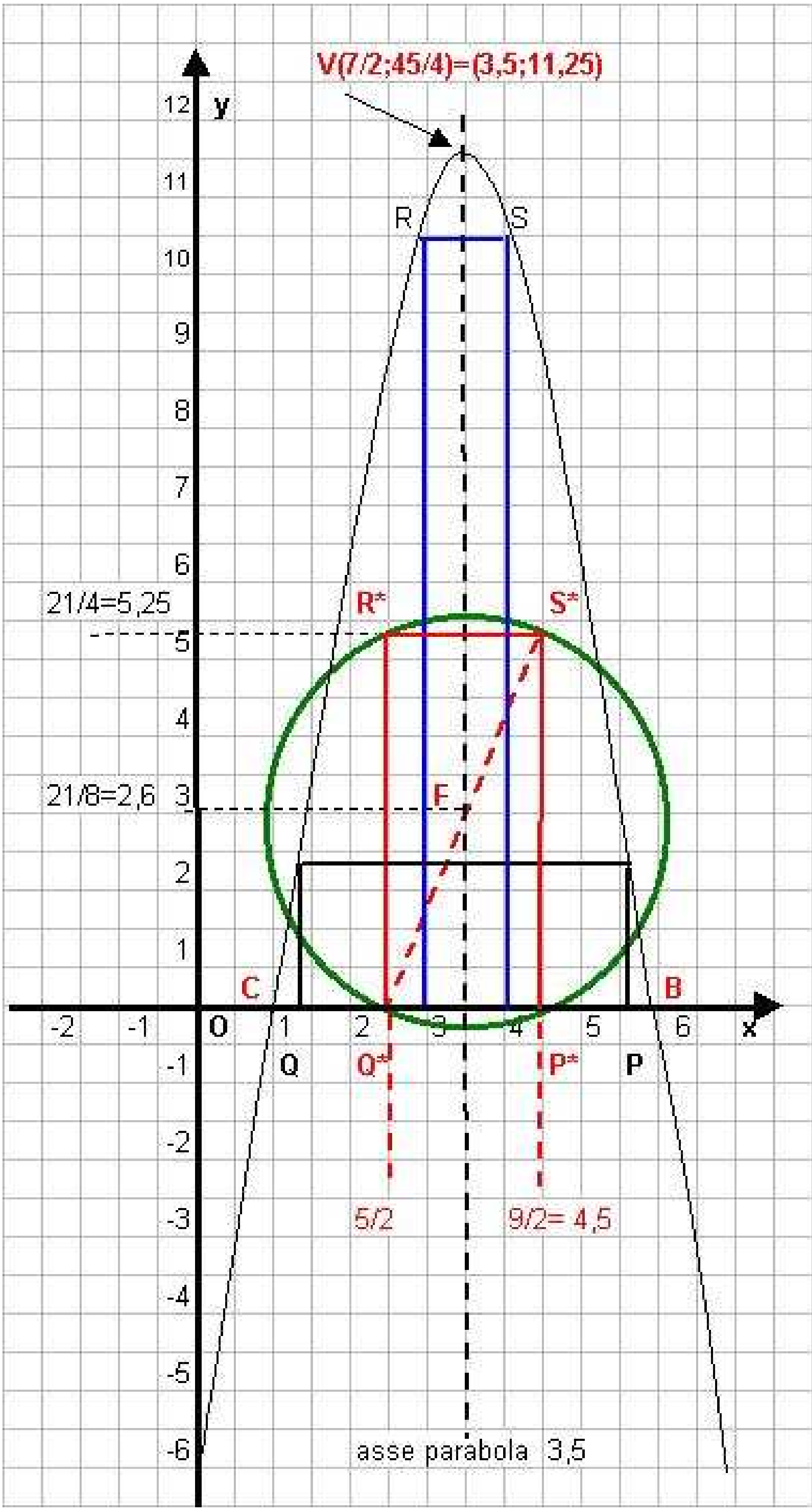
da cui l'equazione della parabola
$y = -x^2 + 7x - 6$

Scriviamone le caratteristiche per poterla rappresentare :
$A\equiv (0; -6)$, $B\equiv (6;0)$ e $C\equiv (1; 0)$

$-x^2 +7x - 6 = 0$
$x^2 - 7x + 6 = 0$

$$x_{12} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \text{ punto C} \\ x_2 = 6 \end{cases}$$

$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(\frac{7}{2},\frac{45}{4}\right) \approx (3{,}5;11{,}25)$ ottenibile con facili passaggi algebrici



V(7/2;45/4)=(3,5;11,25)
y
x
R
S
R*
S*
21/4=5,25
21/8=2,6
F
C
B
O
Q
Q*
P*
P
5/2
9/2= 4,5
asse parabola 3,5
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-2
-1
1
2
3
4
5
6

Ricerchiamo ora i vertici dei rettangoli.

Notiamo che : $\frac{x_P - x_Q}{2} = x_M = \frac{7}{2} = 3{,}5 (\,sempre\,)$

Sappiamo che il perimetro è pari a :

$$2\lfloor 2(x_M - x_Q) + y_R \rfloor = 14{,}5$$
$$2(x_M - x_Q) + y_R = 7{,}25$$
$$2(x_M - x_Q) + y_R = \frac{725}{100}$$
$$2\left(\frac{7}{2} - x_Q\right) + y_R = \frac{29}{4}$$
$$7 - 2x_Q + y_R = \frac{29}{4}$$
$$y_R - 2x_Q = \frac{29}{4} - 7$$
$$y_R - 2x_Q = \frac{29-28}{4}$$
$$y_R - 2x_Q = \frac{1}{4}$$

Dall'equazione della parabola $y = -x^2 + 7x - 6$ abbiamo $y_R = -x_Q^2 + 7x_Q - 6$ quindi

$$-x_Q^{\ 2} + 7x_Q - 6 - 2x_Q = \frac{1}{4}$$
$$-x_Q^{\ 2} + 5x_Q - 6 - \frac{1}{4} = 0$$
$$-x_Q^{\ 2} + 5x_Q - \frac{25}{4} = 0$$
$$x_Q^{\ 2} - 5x_Q + \frac{25}{4} = 0$$
$$x_{Q_{12}}* = \frac{5 \pm \sqrt{25-25}}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

per cui

$$y_R * - 2x_Q * = \frac{1}{4}$$
$$y_R * = \frac{1}{4} + 2x_Q * = \frac{1}{4} + 2\frac{5}{2} = \frac{1+20}{4} = \frac{21}{4} = 5{,}25$$
$$x_P - x_Q = 2\,(x_M - x_Q) = 2\left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right) = 2$$

$$A_S = Bh = (x_P - x_Q)\, y_R = 2\ \frac{21}{4} = \frac{21}{2} = 10{,}5$$

Ricerca punto F centro della circonferenza:

retta per S* (x_S*;y_S*) Q*(x_Q*;y_R*) cioè

S* $\left(\frac{9}{2};\frac{21}{4}\right)$ Q*$\left(\frac{5}{2};0\right)$

E dal'applicazione della formula della retta passante per due punti abbiamo :

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-\frac{21}{4}}{0-\frac{21}{4}} = \frac{x-\frac{9}{2}}{\frac{5}{2}-\frac{9}{2}}$$

$$-2\left(y-\frac{21}{4}\right) = -\frac{21}{4}\left(x-\frac{9}{2}\right)$$

$$y-\frac{21}{4} = \frac{21}{8}x-\frac{189}{16}$$

$$16y-84 = 42x-189$$

16y – 42x +105 = 0

facciamone l'intersezione con $x_F = \frac{7}{2}$

$16y_F - 42 \bullet \frac{7}{2} + 105 = 0$

$16y_F = 21 \bullet 7 - 105$

$y_F = \frac{147-105}{16} = \frac{42}{17} = \frac{21}{8} = 2{,}625$ da cui $F \equiv \left(\frac{7}{2};\frac{21}{8}\right)$

Ricerca della circonferenza, il raggio è dato da:

$$\frac{d}{2} = \frac{\sqrt{(x_S-x_Q)^2+(y_S-y_Q)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{9}{2}-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{21}{4}-0\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+\frac{441}{16}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{505}{16}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{505}{16}} = \sqrt{\frac{505}{64}}$$

Ed applicando l'equazione della circonferenza nella forma $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$ abbiamo :

$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{21}{8}\right)^2 = \frac{505}{64}$$

$$x^2+\frac{49}{4}-7x+y^2+\frac{441}{64}-\frac{21}{4}y = \frac{505}{64}$$

$$x^2+\frac{49}{4}-7x+y^2+\frac{441}{64}-\frac{21}{4}y = \frac{505}{64}$$

$$x^2-7x+y^2-\frac{21}{4}y+\frac{441}{64}+\frac{49}{4}-\frac{505}{64} = 0$$

$$x^2-7x+y^2-\frac{21}{4}y+\frac{784+441-505}{64} = 0$$

$$x^2+y^2-7x-\frac{21}{4}y+\frac{720}{64} = 0$$

$$4x^2+4y^2-28x-21y+45 = 0$$

Problema 4

a) **Scrivere l'equazione della circonferenza di centro C(4;3) e tangente alla retta x – 3y – 5 = 0.**

b) **Trovare la lunghezza della corda AB che la circonferenza stacca sulla retta passante per M(0;1) e parallela alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.**

c) **Scrivere l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y, passante per il punto P(1;2) e per punti d'intersezione con l'asse x della circonferenza considerata.**

d) **Determinare i punti d'intersezione delle due curve.**

a) Ricerca della circonferenza

d (centro-punto di tang.za) = d (punto-retta) = $\frac{|(ax+by+c)|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|x-3y-5|}{\sqrt{1+9}}$ per il punto C(4;3)

quindi $\frac{|x-3y-5|}{\sqrt{1+9}} = \frac{|4-9-5|}{\sqrt{10}} = \frac{|-10|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \bullet \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$ misura del raggio

Quindi l'equazione della circonferenza di centro C (4;3) sarà:

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ da cui

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{10})^2$

$x^2 + 16 - 6x + y^2 + 9 - 6y = 10$

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

b) $y - y_0 = m(x - x_0)$ retta per M(0;1), parallela alla bisettrice I°/III° quadrante y = x con m = 1

$y - 1 = m(x - 0)$ **r)** $y - 1 = x$

Intersezione della retta r) con la circonferenza:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0 \end{cases}$$ sostituiamo nella seconda ed elaboriamo quest'ultima

$x^2 + (x+1)^2 - 8x - 6(x+1) + 15 = 0$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 - 8x - 6x - 6 + 15 = 0$

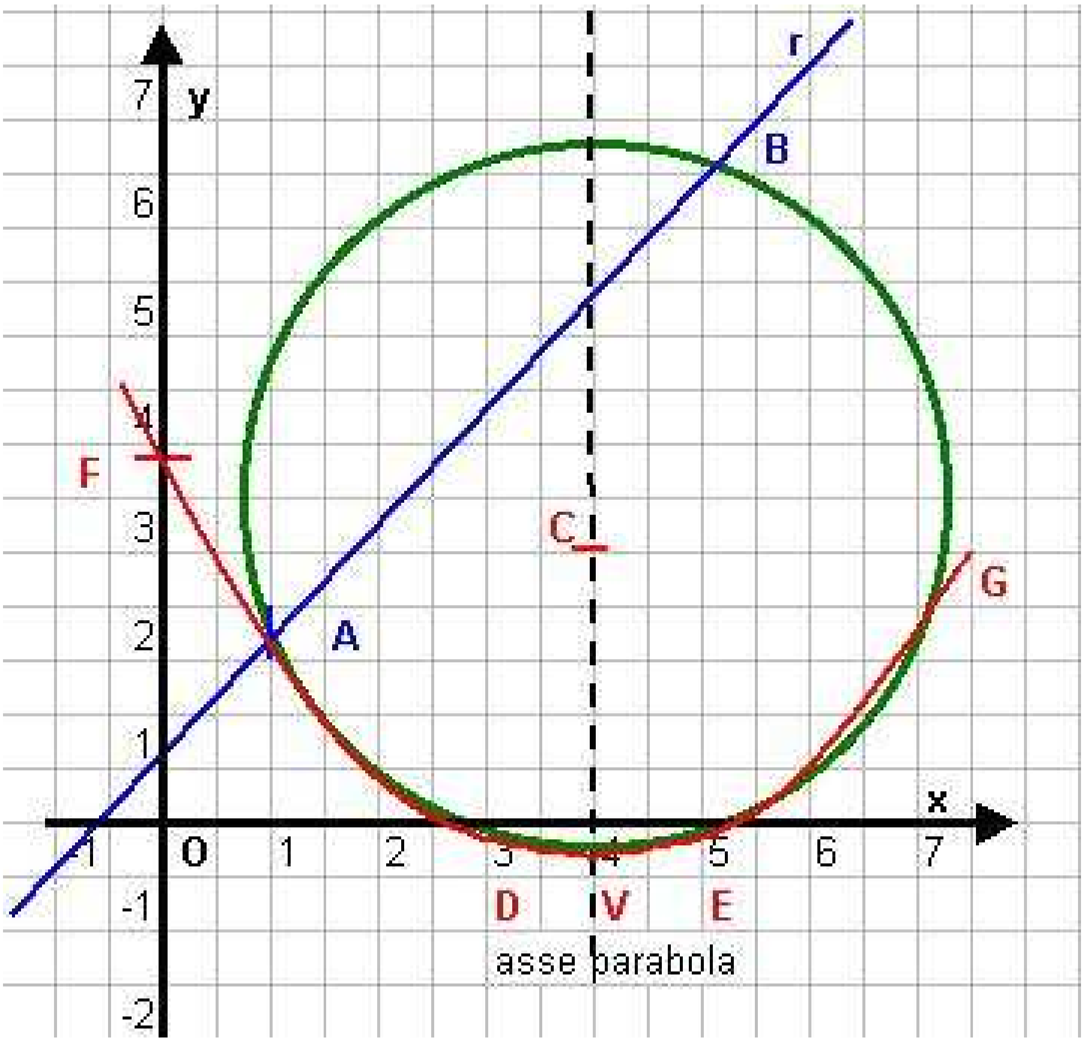
$2x^2 - 12x + 10 = 0$

$x^2 - 6x + 5 = 0$

$x_{12} = +3 \pm \sqrt{9-5} = 3 \pm 2 =$
- $x_1 = 1$ punto A(1,2)
- $x_2 = 5$ punto B(5,6)

lunghezza della corda AB = $\sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

c) $y = ax^2 + bx + c$ con $x = -\frac{b}{2a}$ asse // ad y passa per P(1,2) e per i punti d'intersezione della circonferenza con l'asse x.



Ricerca dei punti d'intersezione della circonferenza con l'asse x (y = 0)

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0 \end{cases}$$ sostituiamo ed elaboriamo la seconda

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$x_{12} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} = 4 \pm 1 =$ $\nearrow x_1 = 3$ da cui D(3,0) ; $\searrow x_2 = 5$ da cui E(5,0)

Impostiamo ora il sistema per la ricerca dei coefficienti della parabola:

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 9a + 3b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{cases}$$

elaboriamo tra la 1^ e la 2^ ricavando una eq.ne equivalente

$$-1 \begin{cases} -a - b - c = -2 \\ \underline{9a + 3b + c = 0} \\ 8a + 2b \; // \; = -2 \end{cases}$$

$4a + b = -1$ quindi il sistema diventa

$$\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + b = -1 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 - 4a \\ a - 1 - 4a + c = 2 \\ 25a + 5b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -1 - 4a \\ c = 3 + 3a \\ 25a + 5b + c = 0 \end{cases}$$

sostituiamo nella terza ed elaboriamo quest'ultima

$$25a + 5(-1 - 4a) + 3 + 3a = 0$$
$$25a - 5 - 20a + 3 + 3a = 0$$
$$8a - 2 = 0$$
$$8a = 2 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{4} \text{ da cui}$$
$$b = -1 - 4a = -1 - 4\left(\frac{1}{4}\right) = -2$$
$$c = 3 + 3a = 3 + 3\left(\frac{1}{4}\right) = 3 + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

da cui l'equazione della parabola è

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{15}{4}$$

Calcoliamone il vertice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(4, \frac{1}{4}\right)$ ottenibili con facili passaggi algebrici.

d) ricerchiamo ora le intersezioni tra le due curve. Ne conosciamo già due punti "D" ed "E", li ritroveremo, inoltre avremo gli altri due mancanti:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0 \\ y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{15}{4} \end{cases}$$ sostituiamo nella prima ed elaboriamola

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{15}{4}\right)^2 - 8x - 6\left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + \frac{15}{4}\right) + 15 = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{16}x^4 + 4x^2 + \frac{225}{16} - x^3 + \frac{15}{8}x^2 - 15x - 8x - \frac{3}{2}x^2 + 12x - \frac{45}{2} + 15 = 0$$

$$5x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{225}{16} - x^3 + \frac{15}{8}x^2 - 23x - \frac{3}{2}x^2 + 12x + \frac{30 - 45}{2} = 0$$

$$\left(\frac{40 + 15 - 12}{8}\right)x^2 + \frac{1}{16}x^4 + \frac{225}{16} - x^3 - 11x - \frac{15}{2} = 0$$

$$\frac{43}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^4 - x^3 - 11x + \frac{225 - 120}{16} = 0$$

$$+\frac{1}{16}x^4 - x^3 + \frac{43}{8}x^2 - 11x + \frac{105}{16} = 0$$

$$x^4 - 16x^3 + 8x^2 - 176x + 105 = 0$$

Risolviamo con Ruffini, effettuando le prime due divisioni con i valori noti di 3 e 5:

	1	–16	+ 86	– 176	105
3		3	- 39	141	– 105
	1	– 13	+ 47	– 35	//
5		5	– 40	35	
	1	– 8	7	//	

e l'equazione diventa $(x - 3)(x^3 - 13x^2 + 47x - 35) = 0$

ottenendo $(x - 3)(x - 5)(x^2 - 8x + 7) = 0$

concludendo le altre due intersezioni sono

$$x_{34} = +4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3 = \begin{cases} x_3 = 1 \text{ ottenendo A(1,2) ritrovandolo} \\ x_4 = 7 \text{ ottenendo G(7, 2)} \end{cases}$$

per il calcolo delle y_3 e y_4 basta sostituire i valori delle x nell'equazione della parabola e con facili passaggi algebrici abbiamo i risultati trascritti.

Problema 5

In un riferimento cartesiano ortogonale xOy siano date le due parabole

c') y' = – x^2 + 2ax e c'') y''= $\frac{x^2}{a^4} - \frac{2x}{a^3}$ **con a > 0.**

Si determini uno dei valori del parametro a in modo che l'area della regione finita di piano delimitata da c' e c'' valga $\frac{8}{3}$**.**

Ricerchiamo le caratteristiche della 1^ parabola **c')** : intersezioni con gli assi e il vertice.

Punto **A')** per x = 0 $\Rightarrow$ y = 0

Punto **B')** per y = 0 $\Rightarrow$ x = 2a

$$\begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + 2ax = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(x - 2a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ritrovando il punto (A')} \\ x = 2a \end{cases}$$

$$V'\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \text{ da cui con facili calcoli abbiamo:}$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2a}{-2} = a \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-4a^2 - 0}{-4} = a^2$$

Ricerchiamo le caratteristiche della 2^ parabola **c'')** : intersezioni con gli assi e il vertice.

c'') $a^4 y'' = x^2 - 2ax$

Punto **A'')** per x = 0 $\Rightarrow$ y = 0 coincidente con (A')

Punto **B'')** per y = 0 $\Rightarrow$ x = 2a

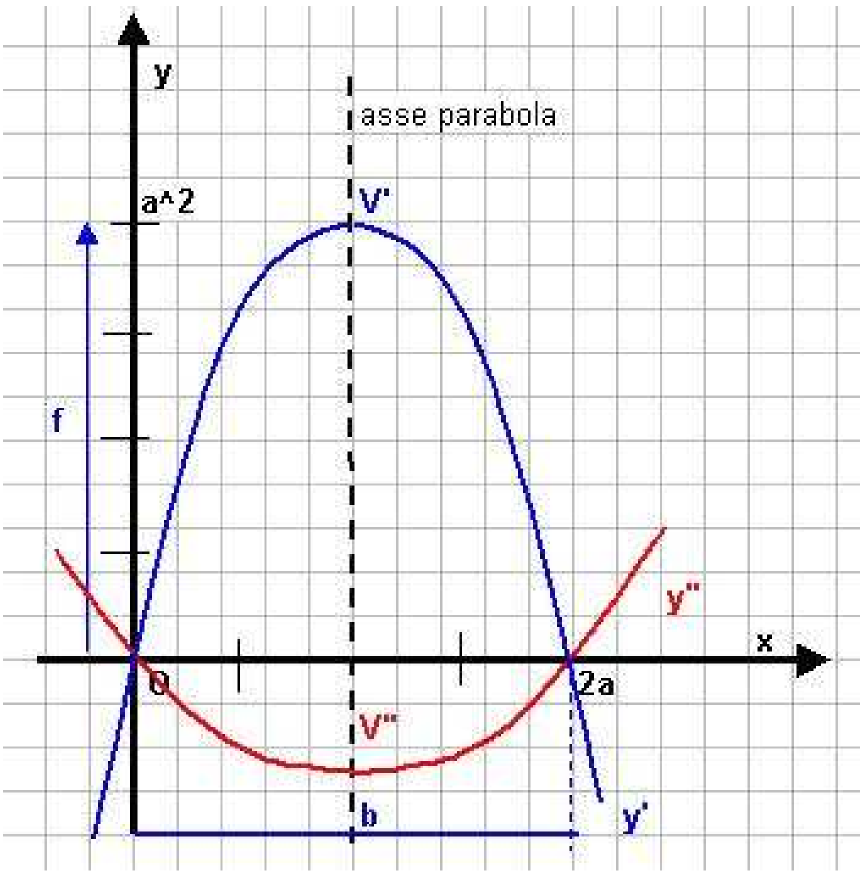
$$\begin{cases} y = 0 \\ -x^2 + 2ax = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x (x - 2a) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \text{ ritrovando il punto (A')} \\ x = 2a \end{cases}$$

V'' $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) =$ da cui con facili calcoli abbiamo:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{-\frac{2}{a^3}}{\frac{2}{a^4}} = \frac{2}{a^3} \bullet \frac{a^4}{2} = a \qquad -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{\frac{4}{a^6}}{\frac{4}{a^4}} = -\frac{4}{a^6} \bullet \frac{a^4}{4} = -\frac{1}{a^2}$$



La formula dell'area del settore parabolico è :

$$\mathbf{A}_{\text{(sett pab)}} = \frac{2}{3}\ (\mathbf{b} \bullet \mathbf{f})$$

$$As(y') = \frac{2}{3}\ (2a \bullet a^2) = \frac{4}{3} a^3$$

$$As(y'') = \frac{2}{3}\ \left(2a \bullet \frac{1}{a^2}\right) = \frac{4}{3a}$$

Ne consegue che:

$$As(tot) = As(y') + As(y'') = \frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3} a^3 + \frac{4}{3a} = \frac{8}{3}$$

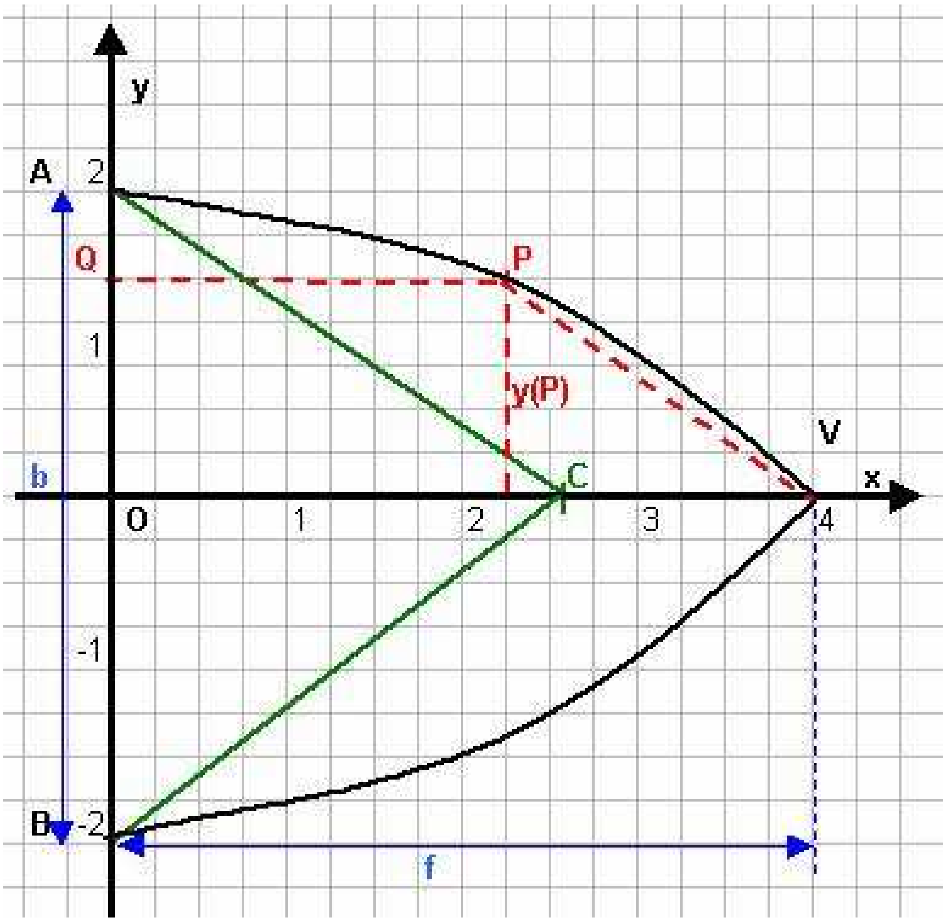
$$4a^4 + 4 - 8a = 0$$

$$a^4 - 2a + 1 = 0$$

$(a^2 - 1) = 0$ ne consegue $a^2 = 1$ da cui $a = \pm 1$

Problema 6

Scrivere l'equazione della parabola *P* con asse coincidente con quello delle x, vertice V(4;0) e passante per A(0;2). Indicare con B l'ulteriore punto d'intersezione di *P* con l'asse y.
Determinare sull'arco AV il punto P equidistante da V e dall'asse delle y.
Trovare il punto C che appartiene all'asse delle x sapendo che l'area del triangolo ABC è doppia dell'area del segmento parabolico ABV.



L'equazione della parabola è del tipo

$x = ay^2 + by + c$

con $V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$;

impostiamo il sistema imponendo anche il passaggio per il punto A(0,2) :

$$\begin{cases} -\frac{\Delta}{4a} = 4 \\ -\frac{b}{2a} = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 4 \\ 4a + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 4 \\ 4a = -c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 4 \\ 4a = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

da cui l'equazione della parabola cercata $\mathbf{x = -y^2 + 4}$

Ricerchiamo ora l'intersezione con l'asse delle y, punto B) :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 - 4 = 0 \quad \text{da cui} \quad y = \pm 2 \quad \text{ottenendo il punto } A(0,2) \text{ dato e } \mathbf{B\ (0\ -2).} \end{cases}$$

Ricerchiamo ora il punto P con la condizione **PQ = PV**
Le coordinate generiche del punto P sono y_P e dall'equazione della parabola $x_P = -y_P^2 + 4$ in Definitiva P $(-y_P^2 + 4\ ;\ y_P)$.
La distanza PQ coincide con l'ascissa : $-y_P^2 + 4$
Mentre la distanza PV è pari a :

$$PV = \sqrt{y_P^{\ 2} + (x_V - x_P)^2} = \sqrt{y_P^{\ 2} + [4-(-y_P+4)]^2} = \sqrt{y_P^{\ 2} + [4+y_P-4]^2} = \sqrt{2y_P^{\ 2}} = y_P\sqrt{2}$$

Imponiamo quindi la condizione **PQ = PV** ed avremo

$$-y_P^2 + 4 = y_P\sqrt{2}$$
$$-y_P^2 - y_P\sqrt{2} + 4 = 0$$
$$+y_P^2 + y_P\sqrt{2} - 4 = 0$$

$$y_P = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2+16}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} y_{1P} = -2\sqrt{2} & \text{non accet. fuori area parab.} \\ y_{2P} = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ricerca del punto C.
Punti noti A(0,2) ; B(0, –2) ; $C(x_C, y_C) = (x_C, 0)$

Condizione $A_S(ABC) = \frac{1}{2} A_S(ABC)$ Area $_{\text{(Sett.Parab.)}} = \frac{2}{3}(b \bullet f) = \frac{2}{3}(4 \bullet 4) = \frac{32}{3}$

Quindi:

$A_S(ABC)$

$$= \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ x_C & 0 & 1 & x_C & 0 \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \bullet \frac{32}{3}$$

$A_S(ABC) = 5{,}33$
A_S(Sett.Parab.)= 10,66

$$\frac{1}{2}[2x_C - (-2x_C)] = \frac{16}{3}$$
$$\frac{1}{2} \bullet 4x_C = \frac{16}{3}$$

$$x_C = \frac{16}{3} \bullet \frac{1}{2} = \frac{8}{3} \approx 2{,}66$$

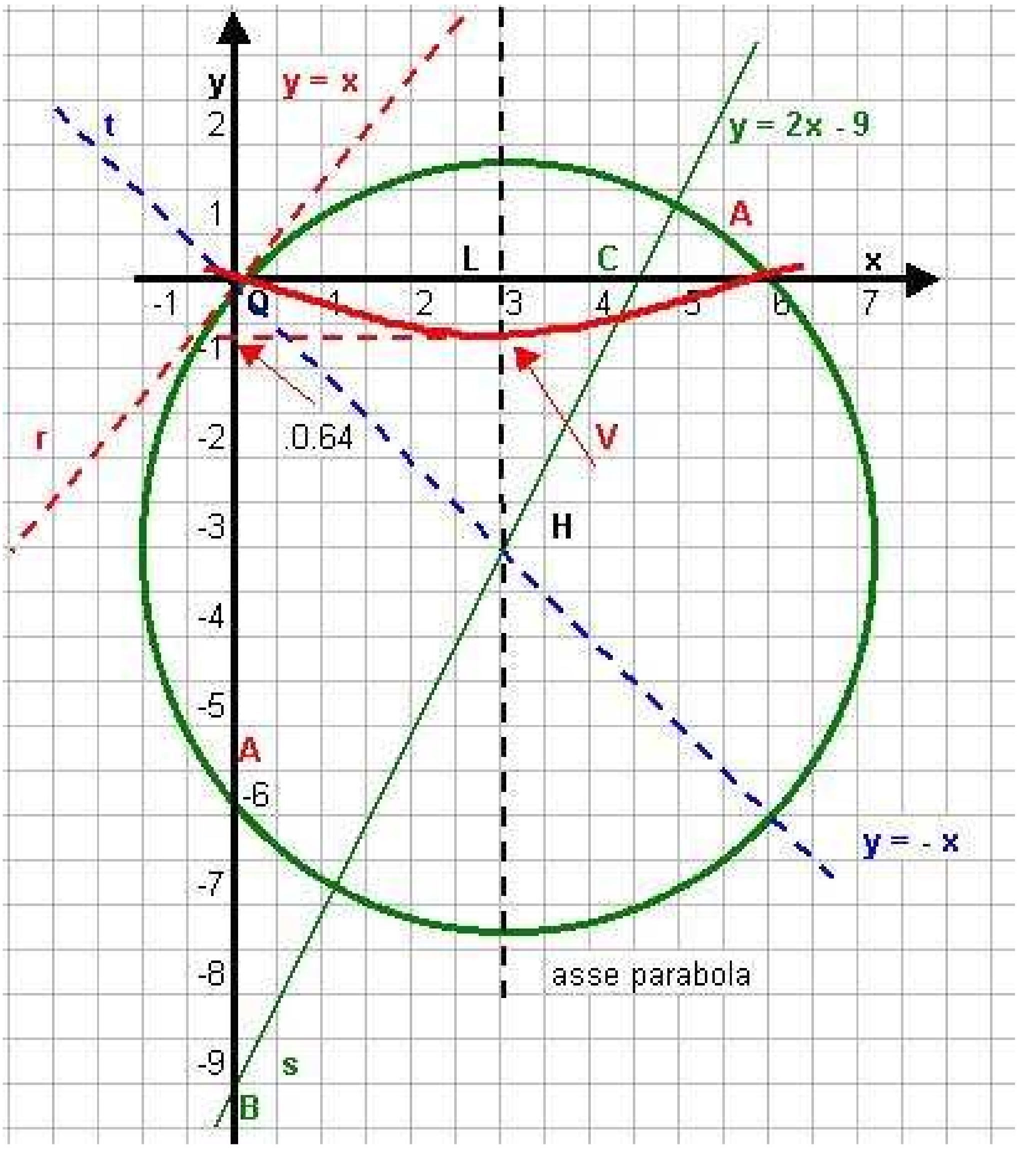
Problema 7

Scrivere l'equazione della circonferenza *C* passante per l'origine e ivi tangente alla retta di equazione x – y = 0 e avente centro H appartenente alla retta di equazione 2x – y – 9 =0, indicando con A l'ulteriore punto d'intersezione di C con l'asse x.
Scrivere l'equazione della parabola *P*, con la concavità rivolta verso l'alto, passante per O e A e che sulla prima bisettrice stacca una corda lunga $8\sqrt{2}$.
Calcolare l'area delle due regioni finite di piano comprese fra *C* e *P*.

r) $x - y = 0 \quad x = y$ s) $-2x + y + 9 = 0 \quad y = 2x - 9$

x	y
0	– 9
9/2	0

t) $y = -x$
bisettrice II° e IV° quadrante, ortogonale alla data y = x e quindi coincidente con il raggio, il sistema tra questa e la retta s ci darà l'intersezione H, centro della circonferenza cercata.



Ricerca centro H

$\begin{cases} y = -x \\ y = 2x - 9 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} y = -x \\ -3x = -9 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -x \\ -x - 2x + 9 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x = 3 \\ y = -3 \end{cases}$

Centro H (3; – 3)

Calcoliamo il valore del raggio r = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ essendo $O(x_1;y_1)$ avremo:
r = $\sqrt{(3-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

Ne consegue che l'equazione della circonferenza sarà:

$(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = r^2$ con α e β coordinate del centro
$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9 \bullet 2$
$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 9 + 6y - 18 = 0$
$x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$

Vediamone l'intersezione con l'asse x

$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0 \end{cases}$

sostituiamo ed elaboriamo la seconda
$x^2 - 6x = 0$
x (x – 6) = 0 da cui x = 0 e x = 6 concludendo i punti d'intersezione sono:
O(0,0) noto ed **A(6,0)**

- Altro modo per determinare i coefficienti della circonferenza :
essendo noti H (3; – 3) e r = $3\sqrt{2}$ e sapendo che:
1) l'eq. della circonferenza passa per O(0,0) ed è del tipo $x^2 + y^2 + ax + by = 0$
2) E' tangente alla retta (r) y = x quindi basterà imporre Δ = 0 dal sistema

$\begin{cases} y = x \\ x^2 + y^2 + ax + by = 0 \end{cases}$ cioé

$2x^2 + x (a + b) = 0$ $\quad$ $\Delta = b^2 - 4ac = (a + b)^2 = 0$ da cui a = – b $\quad$ ottenendo
$x^2 + y^2 - bx + by = 0$
cerchiamo ora l'intersezione con l'asse x di equazione y = 0 per determinare l'altro punto oltre all'origine

$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 - bx = 0 \end{cases}$ cioé

sostituiamo ed elaboriamo la seconda
$x^2 - bx = 0$
x (x – b) = 0 da cui x = 0 e x = b concludendo i punti d'intersezione sono:

O(0,0) noto ed **A(b,0)**

Quindi l'ascissa di A ci dice la lunghezza della corda e sul suo asse b/2 è contenuto il centro H, mentre l'ordinata è data dalla sostituzone nella retta (s) $y_H = 2\frac{b}{2} - 9 = b - 9$; quindi

H $\left(\frac{b}{2}, b-9\right)$

In definitiva avremo l'equazione risolvente:

$$\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + (y - b + 9)^2 = 9 \bullet 2$$

$$x^2 + \frac{b^2}{4} - bx + y^2 + b^2 + 81 - 2yb + 18y - 18b - 18 = 0$$

$$x^2 + y^2 - bx - 2yb + 18y + \frac{b^2}{4} + b^2 - 18b - 18 + 81 = 0$$

dalle condizioni iniziali sappiamo che c = 0 quindi $\frac{b^2}{4} + b^2 - 18b - 18 + 81 = 0$ da cui

$5b^2 + 324 - 72b - 72 = 0$

$5b^2 - 72b + 252 = 0$

$$b = \frac{+36 \pm \sqrt{1296 - 1260}}{5} = \frac{36 \pm 6}{5} =$$

$b_1 = 6$

$b_2 = \frac{42}{5}$ non accettabile

Ripercorrendo a ritroso tutte le condizione fatte ritroveremo i valori già ottenuti; è chiaro che questo procedimento è più lungo e leggermente più oneroso.

Ricerchiamo ora la parabola passante per O(0,0) e per A(6,0) con a > 0 e del tipo $y = ax^2 + bx + c$ che stacca su y = – x la corda $\mathbf{8}\sqrt{2}$ **.**

Imponiamo il passaggio per i punti O(0,0) ed A(6,0)

O) c = 0 e A) 36a + 6b = 0

Inoltre

$$\begin{cases} y = -x \\ y = ax^2 + bx \end{cases}$$ sistema che ci darà due soluzioni essendo $\Delta > 0$

$ax^2 + bx + x = 0$

$ax^2 + x\,(b + 1) = 0$ da cui

$$x_{12} = \frac{-(b+1) \pm \sqrt{(b+1)^2}}{2a} =$$

$$x_1 = \frac{-(b+1) - (b+1)}{2a} = \frac{-b-1-b-1}{2a} = \frac{-2(b+1)}{2a} = \frac{-(b+1)}{a}$$

$$x_2 = \frac{-(b+1) + (b+1)}{2a} = \frac{-b-1+b+1}{2a} = 0$$

notiamo inoltre che la corda ha formula d = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = m$ (misura)

Quindi $(x_2 - x_1) = \dfrac{-(b+1)}{a}$

Mentre per y_2 e y_1 basterà sostituire o nell'equazione della parabola i valori di x_2 e x_1 , o, metodo più rapido, nell'equazione della y = – x.
Vediamone tutti e due i metodi:

$$y_1 = a\left[\frac{-(b+1)}{a}\right]^2 + b\left[\frac{-(b+1)}{a}\right] = a\frac{(b+1)^2}{a^2} + \frac{-b^2-b}{a} = \frac{b^2+2b+1-b^2-b}{a} = \frac{b+1}{a}$$

$$y_1 = x_1 = -\frac{-(b+1)}{a} = \frac{b+1}{a} \quad \text{c.v.d.}$$

$y_2 = 0$ essendo $x_2 = 0$ quindi

$$(y_2 - y_1) = 0 - \frac{b+1}{a} = -\frac{b+1}{a}$$

Applichiamo la formula

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left[\frac{-(b+1)}{a}\right]^2 + \left[\frac{-(b+1)}{a}\right]^2} = \sqrt{2\frac{(b+1)^2}{a^2}} = \frac{b+1}{a}\sqrt{2}$$

$$\frac{b+1}{a}\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \quad \text{con } a > 0$$

b+1 = 8a

Quindi in definitiva il sistema risolvente per i coefficienti della parabola è:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 36a + 6b = 0 \\ b + 1 = 8a \end{cases} \qquad \begin{cases} c = 0 \\ b = 8a - 1 \\ 36a + 6(8a - 1) = 0 \end{cases}$$

sostituita la seconda nella terza risolviamo quest'ultima :

36a + 48a – 6 = 0
84a = 6

$$a = \frac{6}{84} = \frac{1}{14} \quad \text{da cui} \quad b = 8a - 1 = 8\frac{1}{14} - 1 = \frac{8-14}{14} = \frac{-6}{14} = -\frac{3}{7} \quad \text{e} \quad c = 0$$

In definitiva l'equazione della parabola sarà:

$$y = \frac{1}{14}x^2 - \frac{3}{7}$$

con $V\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right) = \left(3; -\dfrac{9}{14}\right)$

$$-\frac{b}{2a}=\frac{\frac{3}{7}}{2\frac{1}{14}}=\frac{3}{7}\bullet 7=3 \qquad -\frac{\Delta}{4a}=-\frac{b^2-4ac}{4a}=-\frac{\frac{9}{49}}{\frac{4}{14}}=-\frac{9}{49}\bullet\frac{7}{2}=-\frac{9}{14}\approx 0{,}64$$

Ricerchiamo infine l'area della superficie compresa tra il segmento circolare ed il settore parabolico:

in formule $A_S(OVA) = \frac{2}{3}\left(OA\bullet LV\right)$

Area seg. Circolare(OA) = Area Settore (OHA) – A_S triangolo (OHA) = $\frac{OA\bullet r}{2}-\frac{OA\bullet LC}{2}$

Area Sett.Parab. = $\frac{2}{3}\left(x_A\bullet y_V\right)=\frac{2}{3}\left(x\bullet\frac{9}{14}\right)=\frac{18}{7}$

Notiamo che OAH e isoscele e retto in H quindi OA = $\frac{\pi\bullet r}{180}\bullet 90=\frac{\pi}{2}r=\frac{\pi}{2}\bullet 3\sqrt{2}=\frac{3\pi}{2}\sqrt{2}$

Area Sett(OHA) = $\frac{OA\bullet r}{2}=\frac{\frac{3\pi}{2}\sqrt{2}\bullet 3\sqrt{2}}{2}=\frac{\frac{9\pi}{2}\bullet 2}{2}=\frac{9\pi}{2}$

A_S triangolo (OHA) $=\frac{OA\bullet LC}{2}=\frac{6\bullet 3}{2}=9$

$A_{TOT} = A_{PARAB} + (A_{SETTORE} - A_{TRIANGOLO}) =$

$$=\frac{18}{7}+\left(\frac{9\pi}{2}-9\right)=\frac{18}{7}+\left(\frac{9\pi-18}{2}\right)=\frac{36+63\pi-126}{14}=\frac{63\pi-90}{14}$$

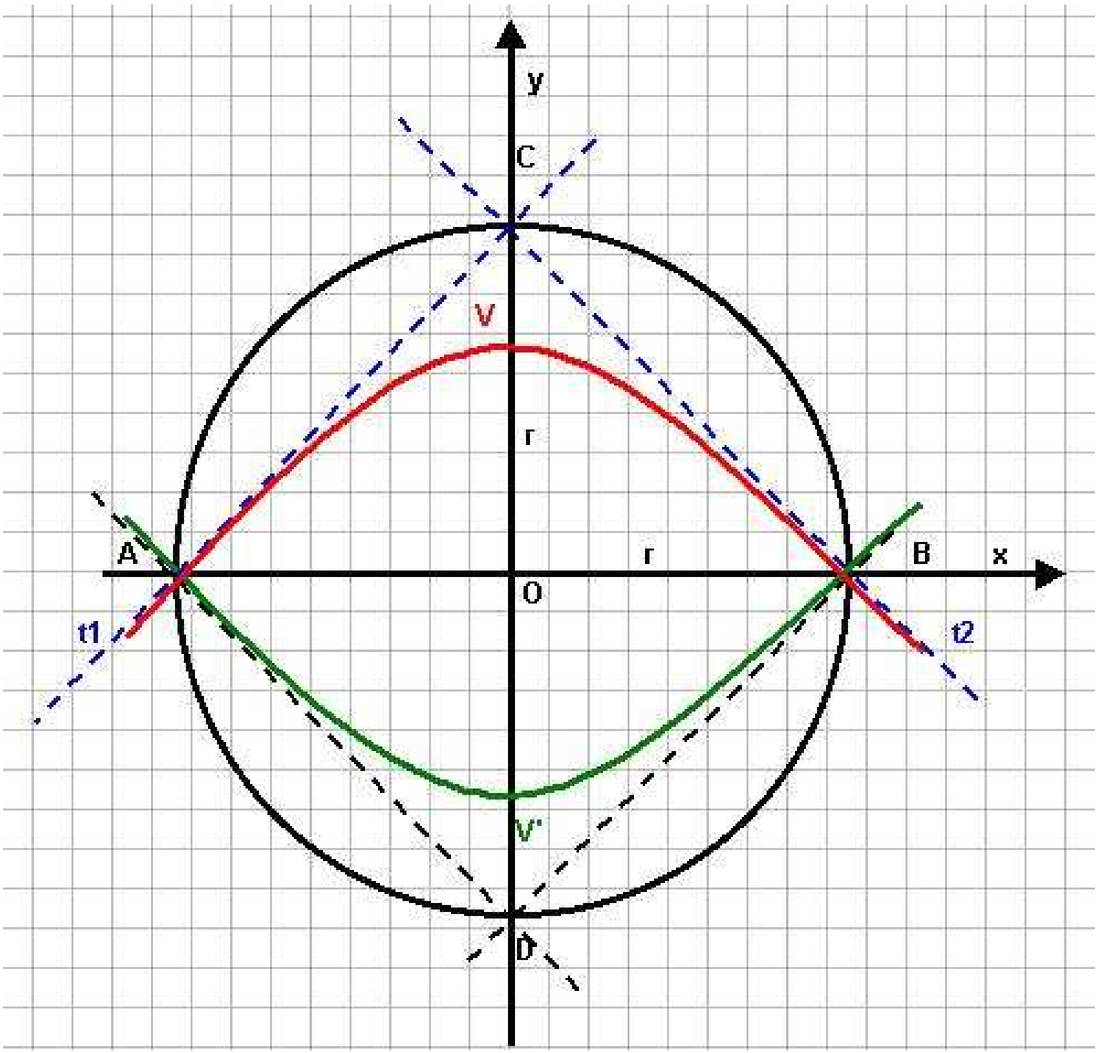
Problema 8 (sessione 1982/1983)

Una parabola passante per gli estremi di un diametro di una circonferenza di raggio r ha le tangenti in tali punti perpendicolari tra loro e l'asse del diametro come asse di simmetria .

Si scrivano, in un sistema di assi cartesiano , opportunamente scelto, l'equazione della parabola e della circonferenza e si calcolino le aree delle regioni finite di piano delimitate dalle due curve.

Dalle varie considerazioni d'opportunità, ci si rende conto che il sistema di riferimento più conveniente, anche in relazione al calcolo delle aree è quello avente per origine il centro della circonferenza, per asse delle x la retta del diametro e per asse delle y quello dell'asse del diametro, cioè la retta perpendicolare al diametro sull'asse delle x nel suo punto di mezzo.
L'orientamento degli assi è indifferente, scegliamo come in figura, in cui la parabola ha la concavità rivolta verso il basso, quanto detto ci permetterà considerazioni d'opportune simmetrie, e rototraslazioni.
In formule per la figura :

1) circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$ con $r > 0$
2) parabola $y = ax^2 + c$ con $a < 0$
3) punti $A(-r; 0)$ e $B(r; 0)$
4) $m_{t1} \bullet m_{t2} = -1$



Quanto detto ci permette di dire che l'equazione della circonferenza è $x^2 + y^2 = r^2$ con $r > 0$ e la parabola è del tipo
$y = ax^2 + c$ con $a < 0$.
Ricerchiamo la condizione di tangenza tra la parabola e la retta per A(– r; 0)

$$\begin{cases} y = m(x + r) \\ y = ax^2 + c \end{cases}$$

Sostituiamo ed eaboriamo la seconda determinando i valori di m (coeff. angolare di tangenza)

$m(x + r) = ax^2 + c$
$mx + mr - ax^2 - c = 0$
$ax^2 - mx + c - mr = 0$ cond di tang.: $\Delta = 0$ cioè $b^2 - 4ac = 0$
$m^2 - 4a(c - mr) = 0$
$m^2 - 4ac + 4amr = 0$
$m_{12} = +2ar\ + 2ar \pm \sqrt{4a^2r^2 + 4ac} = +2ar \pm 2\sqrt{a^2r^2 + ac}$

Per quanto detto dovremo avere un solo valore di m quindi
$\pm 2\sqrt{a^2r^2 + ac} = 0$ elevando al quadrato si ha
$a^2r^2 = -ac$ da cui
$c = \dfrac{-a^2r^2}{a} = -ar^2$
Infine dall'appartenenza di A(– r; 0) alla parabola ricaviamo $0 = ar^2 + c$ cioè

$c = -a r^2$ ritrovando la stessa condizione, conseguentemente **$m_{t1} = -2ar$**

Con analoghe considerazioni in B(r ; 0) abbiamo $y = ax^2 - ar^2$ e l'intersezione con la retta generica abbiamo:

$$\begin{cases} y = m(x - r) \\ y = ax^2 - ar^2 \end{cases}$$

Sostituiamo ed eaboriamo la seconda determinando i valori di m (coeff. angolare di tangenza)

$m(x - r) = ax^2 - ar^2$
$mx - mr = ax^2 - ar^2$
$-ax^2 + ar^2 + mx - mr = 0$
$+ax^2 - mx + mr - ar^2 = 0$ cond di tang.: $\Delta = 0$ cioè $b^2 - 4ac = 0$
$m^2 - 4a(mr - ar^2) = 0$
$m^2 - 4amr + 4ar^2 = 0$
$(m - 2ar)^2 = 0$ quindi **$m_{t2} = 2ar$**

Ottenendo $m_{t1} \bullet m_{t2} = -1$ cioè $-2ar \bullet 2ar = -1$

$-4a^2r^2 = -1$

$a^2 = \dfrac{1}{4r^2} \quad \Rightarrow \quad a_{12} = \pm\sqrt{\dfrac{1}{4r^2}} = \pm\dfrac{1}{2r}$

Conseguentemente le parabole cercate avranno equazioni:

$$\begin{cases} ar^2 + c = 0 \quad (\text{ eq. app. ad A}) \\ a_{12} = \pm\dfrac{1}{2r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = -\,ar^2 \\ a_{12} = \pm\dfrac{1}{2r} \end{cases}$$

Di conseguenza :

$$c_1 = -\left(-\frac{1}{2r}\bullet r^2\right) = +\frac{r}{2} \qquad\qquad c_2 = -\left(\frac{1}{2r}\bullet r^2\right) = -\frac{r}{2}$$

In definitiva avremo:

$P_1)\quad y_1 = a_1x^2 + c_1 = -\dfrac{1}{2r}x^2 + \dfrac{r}{2} \qquad P_2)\quad y_2 = a_2x^2 + c_2 = \dfrac{1}{2r}x^2 - \dfrac{r}{2}$

Mentre le equazioni delle tangenti sono:

$$y_1 = m_1(x + r)$$
$$y_1 = -\,2ar(x + r)$$
$$y_1 = -\,2arx - 2ar^2$$
$$y_1 = -\,2\left(-\frac{1}{2r}\right)rx - 2\left(-\frac{1}{2r}\right)r^2$$
$$y_1 = x + r$$

$$y_2 = m_2(x + r)$$
$$y_2 = 2ar(x - r)$$
$$y_2 = 2arx - 2ar^2$$
$$y_2 = 2\left(-\frac{1}{2r}\right)rx - 2\left(-\frac{1}{2r}\right)r^2$$
$$y_2 = -\,x + r$$

Punto d'intersezione delle tangenti:

$$\begin{cases} y = x + r \\ y = -\,x + r \end{cases}$$

$x + r = -\,x + r$

$2x = 0 \quad x = 0 \qquad y = r \qquad C(\,0\,;\,r\,)$

La parabola che ci interessa è :

$$y = a_1x^2 + c_1 = -\frac{1}{2r}x^2 + \frac{r}{2} \quad \text{con} \quad V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(0;\frac{r}{2}\right)$$

Le regioni di piano delimitate dalle due curve sono due e facilmente calcolabili, osservando che una è pari ad un semicerchio diminuito del settore parabolico AVBO, e l'altra è uguale ad un semicerchio aumentato del medesimo settore.

Applichiamo il teorema di Archimede

$$A_{\text{Sett.Parabolico (AVBO)}} = \frac{2}{3}\left(AB \bullet OV\right) = \frac{2}{3} \bullet 2r \bullet \frac{r}{2} = \frac{2}{3}r^2$$

$$A_{\text{Semicerchio}} = \frac{\pi(AO)^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$$

1^ Area) $A_{\text{Sem}} - A_{\text{Parab}} = \dfrac{\pi r^2}{2} - \dfrac{2}{3}r^2 = r^2\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)$

2^ Area) $A_{\text{Sem}} + A_{\text{Parab}} = \dfrac{\pi r^2}{2} + \dfrac{2}{3}r^2 = r^2\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2}{3}\right)$

Problema 9

Scritte l'equazioni della circonferenza avente centro nell'origine e raggio r = 4 e della ellisse avente un vertice in (0;5) e passante per (1; $\sqrt{21}$), determinare i punti d'intersezione delle due curve, considerate poi il rettangolo aventi tali punti come vertici, determinare sulla diagonale situata nel 1° e 3° quadrante un punto P tale che risulti : $PA^2 + PB^2 = 14$
essendo A e B i vertici dell'ellisse situati sull'asse x. (disegno a pag. 153)

Determiniamo l'eq.ne della circonferenza:
dall'eq.ne generica $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ applicata al nostro esercizio con C(0,0) si ha:

$$\mathbf{x^2 + y^2 = 16}$$

Passiamo ora all'ellisse, di eq.ne generica :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Imponiamo il passaggio per il vertice V(0,5) e il punto P(1, $\sqrt{21}$) ottenendo il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{25}{b^2} = 1 \\ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{21}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 \\ 4a^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = 25 \\ b^2 + 21a^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 \\ a = \pm\sqrt{\dfrac{25}{4}} = \pm\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 5 \\ 21a^2 = 25a^2 - 25 \end{cases}$$

Quindi per l'ellissi abbiamo:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \qquad \frac{4x^2}{25}+\frac{y^2}{25}=1 \qquad \mathbf{4x^2 + y^2 = 25}$$

Determiniamo ora i punti d'intersezione tra le due curve :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ 4x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 16 - x^2 \\ 4x^2 + 16 - x^2 = 25 \end{cases}$$

Elaboriamo la 2^ eq.ne

$3x^2 = 25 - 16$
$3x^2 = 9$
$x_{12} = \pm\sqrt{3}$

ne consegue
$y^2 = 16 - x^2$
$y^2 = 16 - 3$
$y^2 = 13$
$y_{12} = \pm\sqrt{13}$

In definitiva i punti d'intersezione sono:

punto	ascissa	ordinata
P	$\sqrt{3}$	$\sqrt{13}$
Q	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{13}$
R	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{13}$
S	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{13}$

La diagonale che ci interessa (1° e 3° quadrante) appartiene ai punti P ed S, quindi con l'applicazione della eq.ne della retta passante per due punti abbiamo:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ con P($\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$) ed S($-\sqrt{3}$, $-\sqrt{13}$); conseguentemente

$$\frac{y-\sqrt{13}}{-\sqrt{13}-\sqrt{13}}=\frac{x-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}$$

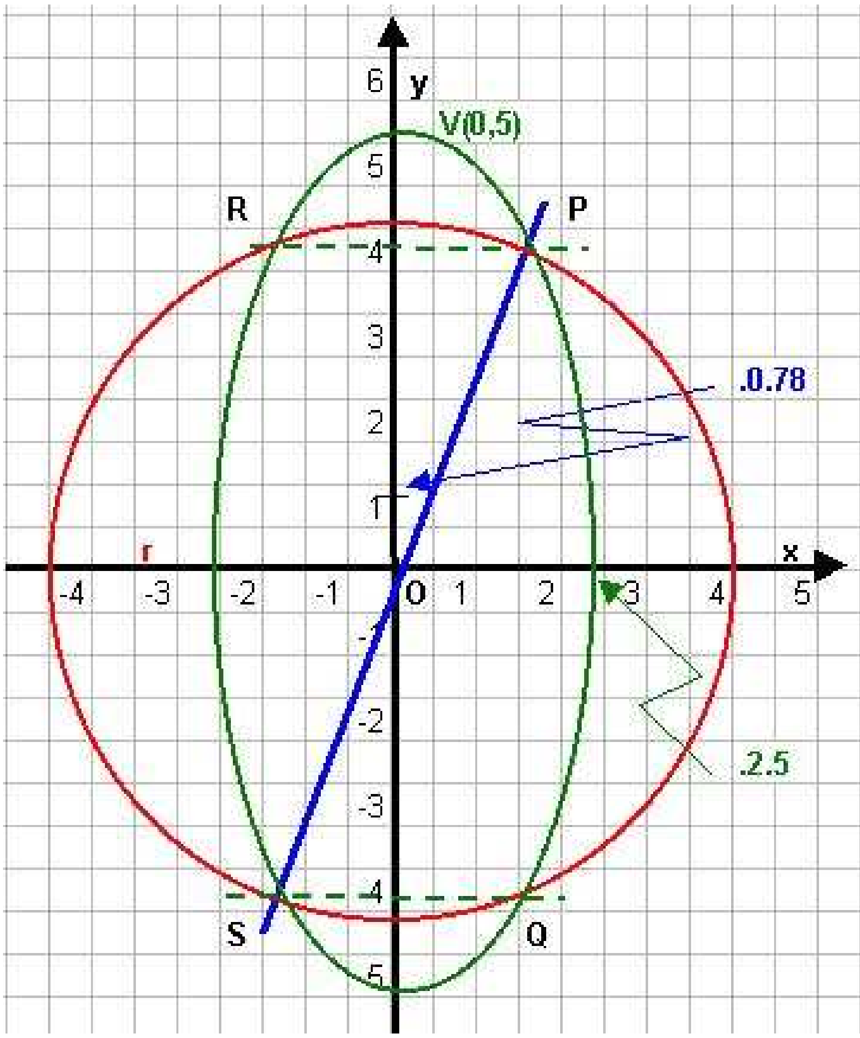
$$\frac{y-\sqrt{13}}{-2\sqrt{13}}=\frac{x-\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}$$

$$-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{13}\right)=-2\sqrt{13}\left(x-\sqrt{3}\right)$$

$$\sqrt{3}y-\sqrt{3\bullet 13}=\sqrt{13}x-\sqrt{3\bullet 13}$$

$y = x\,\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ (eq.ne della diagonale)

Grafichiamo:



I vertici dell'ellisse sono (sull'asse x) $A(\frac{5}{2},0)$ e $B(-\frac{5}{2},0)$; il punto generico avrà coordinate P(x,y), quindi:

$PA^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-0)^2$ e $PB^2 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y-0)^2$

Impostiamo l'eq.ne risolvente data: $PA^2 + PB^2 = 14$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + (y-0)^2 + \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + (y-0)^2 = 14$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 + \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 14$$

$$x^2 + \frac{25}{4} - 5x + y^2 + x^2 + \frac{25}{4} + 5x + y^2 = 14$$

$$2x^2 + 2y^2 + \frac{50}{4} = 14$$

$$8x^2 + 8y^2 + 50 = 56$$

$4x^2 + 4y^2 = 3$ ma il punto appartiene alla diagonale cioè $y = x\dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$ quindi:

$$4x^2 + 4\left(x\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}\right)^2 = 3$$

$$4x^2 + 4x^2\frac{13}{3} = 3$$

$$12x^2 + 52x^2 = 9$$

$$64x^2 = 9$$

$$x_{12} = \pm\sqrt{\frac{9}{64}} = \pm\frac{3}{8}$$

Quindi i punti cercati avranno la y pari a $y = \pm\dfrac{3}{8}\sqrt{\dfrac{13}{3}}$, concludendo le soluzioni sono:

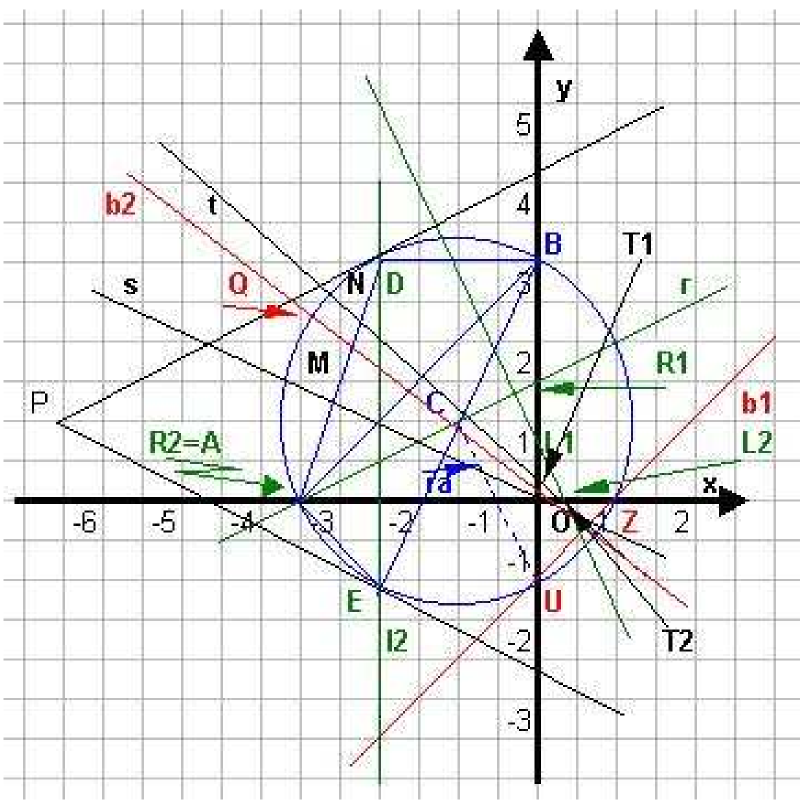
$P_1\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{3}{8}\sqrt{\dfrac{13}{3}}\right)$ e $P_2\left(-\dfrac{3}{8},-\dfrac{3}{8}\sqrt{\dfrac{13}{3}}\right)$

Problema 10

Date le rette s) $3x + 4y = 0$ e t) $4x + 3y - 1 = 0$
Determinare le espressioni delle bisettrici degli angoli da esse formati e indicare con b_1 quella avente il coefficiente angolare positivo.
Determinare l'equazione della circonferenza passante per i punti d'intersezione di b_1 con gli assi coordinati e avente il centro C sulla retta r) $2y - x - 3 = 0$.
Sia A il punto d'intersezione di tale circonferenza con il semiasse negativo di x e B il punto d'intersezione con il semiasse positivo di y.
Condurre dal punto P(– 6,1) le rette tangenti alla circonferenza t_1 e t_2:
determinare i punti D ed E di tangenza e calcolare le aree dei triangoli ADB e ABE.
Dato poi il fascio di rette di equazione:

$$\mathbf{(k + 1)x + y + 2k - 4 = 0}$$

determinare per quali valori di k le rette incontrano il segmento AB e scrivere le equazioni delle rette del fascio che hanno distanza uguale a 1 dal centro della circonferenza.



Trascriviamo i dati per poi riportarli sul grafico:
s) $3x + 4y = 0$
t) $4x + 3y - 1 = 0$

s	x	y
O	0	0
S	1	$-\dfrac{3}{4} \approx 0{,}75$

t	x	y
T_1	0	$\dfrac{1}{3} \approx 0{,}33$
T_2	$\dfrac{1}{4} \approx 0{,}2$	0

Punto K d'intersezione

$$-\frac{4}{3}\quad \begin{cases} s)\ 3x + 4y = 0 \\ t)\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases}$$
$$// \ -\frac{16}{3}y + 3y - 1 = 0$$

Elaborando quest'ultima ne consegue :
$-16y + 9y - 3 = 0$
$-7y = 3$

$y = -\frac{3}{7} \approx 0{,}42$ da cui $x = -\frac{4}{3}y = -\frac{4}{3} \bullet -\frac{3}{7} = \frac{4}{7}$ quindi $K\left(\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}\right)$

Ricerca delle bisettrici come luogo geometrico equidistante dalle rette date, quindi, considerato il punto **Q(x;y)** generico avremo :

$$d(MQ) = d(NQ)$$

e in formule da $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\frac{|3x + 4y|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|4x + 3y - 1|}{\sqrt{16 + 9}}$$

ne conseguono due casi, per il valore assoluto:
1°) $3x + 4y = 4x + 3y - 1$

b_1) $x - y - 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = \frac{-1}{-1} = 1$

2°) $3x + 4y = -(4x + 3y - 1)$
$3x + 4y = -4x - 3x + 1$

b_2) $7x + 7y - 1 = 0 \Rightarrow m = -\frac{a}{b} = \frac{-7}{7} = -1$

Per graficare la **b_1** riportiamone alcuni valori

b_1	x	y
U	0	– 1
Z	1	0

Analogamente per la retta r
r) $2y - x - 3 = 0$

R	x	y
R_1	0	$\frac{3}{2} = 1{,}5$
R_2	–3	0

Il centro della circonferenza giace sulla retta r e sarà l'intersezione dell'asse del segmento UZ con la retta stessa.

L'equazione dell'asse, essendo un luogo geometrico è sempre ottenibile mediante la formula della distanza di due punti e cioè: noti i punti U(0, – 1) e Z(1,0)

d(UC) = d(ZC)

e in formule da d = $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$$(x-0)^2+(y+1)^2=(1-x)^2+(0-y)^2$$
$$x^2+y^2+2y+1=1+x^2-2x+y^2$$

e semplificando otteniamo l'eq. dell'asse $2x + 2y = 0$
asse **a)** $x + y = 0$

A	x	y
O	0	0
M	1	–1
C	–1	1

Coordinate generiche del centro $C(\alpha,\beta)$, calcolabili ora con l'intersezione della retta data e dell'asse:

$$\begin{cases} 2y - x - 3 = 0 \\ y + x = 0 \end{cases}$$
$$3y \quad // \quad -3 = 0$$

$y = 1$
$x = -y \Rightarrow x = -1$ quindi $C(\alpha,\beta)$ = **C (–1, 1)**.
Ricerchiamo l'eq.ne della circonferenza.
Dati il centro C (–1, 1) e il punto U(0, – 1), cerchiamone il valore del raggio:
$r = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(0+1)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
Di conseguenza l'eq.ne è:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \text{ da cui}$$
$$(x+1)^2+(y-1)^2=5$$
$$x^2+2x+2+y^2-2y+1=5$$
$$x^2+y^2+2x-2y-3=0$$

Vediamone le intersezioni con gli assi :

Punto **(A)**

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-3=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$x_{12} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 =$ $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

$A \equiv R_2 = (-3 , 0)$

Punto **(B)**

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-3=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$y_{12} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2 =$ $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

B = (0 , 3)

Ricerchiamo ora le eq.ni delle tangenti e le coordinate dei punti di tangenza:

I° Modo

Retta generica per il punto P(- 6,1), messa a sistema con l'eq.ne della circonferenza, e successivamente imporre il $\Delta = 0$ (cond. di tang.) per determinare il coefficiente angolare.

La retta per P ha espressione: $y - 1 = m(x + 6)$ e quindi

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ y = m(x + 6) + 1 \end{cases}$$

Sostituiamo la 2^ eq.ne nella 1^ ed elaboriamo quest'ultima:

$x^2 + y^2 + 2x - 2y + 3 = 0$

$x^2 + [m(x+6)+1]^2 + 2x - 2[m(x+6)+1] - 3 = 0$

$x^2 + m^2(x+6)^2 + 1 + 2m(x+6) + 2x - 2m(x+6) - 2 - 3 = 0$ semplificando

$x^2 + m^2(x^2 + 36 + 12x) + 2x - 4 = 0$

$x^2 + m^2x^2 + 36\,m^2 + 12\,m^2x + 2x - 4 = 0$

$x^2 (1+ m^2) + 2x (1 + 6\,m^2) + 36\,m^2 - 4 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad (1 + 6\,m^2)^2 - (1 + m^2)(36\,m^2 - 4) = 0$

$36m^4 + 12m2 + 1 - (36m^2 - 4 + 36m^4 - 4m^2) = 0$

$36m^4 + 12m2 + 1 - 36m^2 + 4 - 36m^4 + 4m^2 = 0$

$20m^2 = 5$

$m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Concludendo questa ricerca le eq.ni delle tangenti hanno espressione:

$t_1)\quad y - 1 = \frac{1}{2}(x + 6)$

$2y - 2 = x + 6$

$x - 2y + 8 = 0$

$t_2)\quad y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 6)$

$2y - 2 = - x - 6$

$x + 2y + 4 = 0$

II° Modo

Il punto P(– 6, 1) è il centro di un fascio di rette proprio, cerchiamone le due rette che distano proprio $\sqrt{5}$ dal punto C(– 1, 1):

Eq.ne del fascio

$y - 1 = m (x + 6)$ da cui $y - mx - 6m - 1 = 0$

applichiamo la $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ e nel nostro caso avrà espressione:

$$\frac{|1 + m - 6m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{5}$$

$$\left[\frac{|1 + m - 6m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}}\right]^2 = \left[\sqrt{5}\right]^2$$

$$\left(\frac{-5m}{\sqrt{m^2 + 1}}\right)^2 = 5$$

$$\frac{25m^2}{m^2 + 1} = 5 \quad \text{con } m^2 \neq -1$$

$25m^2 = 5m^2 + 5$
$20m^2 = 5$

ritrovando $m^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow m = \pm\frac{1}{2}$

Si può infine notare che r) ha $m = \frac{1}{2}$ ed è parallela alla t_1.

Per le coordinate dei punti di tangenza procederemo mettendo a sistema la eq.ne della circonferenza con le rette trovate:

Punto **(D)**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ x = 2y - 8 \end{cases}$$

Sostituiamo la 2^ eq.ne nella 1^
ed elaboriamo quest'ultima:
$(2y - 8)^2 + y^2 + 2(2y - 8) - 2y - 3 = 0$
$4y^2 + 64 - 32y + y^2 + 4y - 16 - 2y - 3 = 0$
$5y^2 - 30\,y + 45 = 0$
$y^2 - 6y + 9 = 0$
$(y - 3)^2 = 0$
$y = 3 \Rightarrow x = 6 - 8 = -2$ per cui $D(-2, 3)$

Punto **(E)**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0 \\ x = -2y - 4 \end{cases}$$

Sostituiamo la 2^ eq.ne nella 1^
ed elaboriamo quest'ultima:
$(-2y - 4)^2 + y^2 + 2(-2y - 4) - 2y - 3 = 0$
$4y^2 + 16 + 16y + y^2 - 4y - 8 - 2y - 3 = 0$
$5y^2 + 10\,y + 5 = 0$
$y^2 + 2y + 1 = 0$
$(y + 1)^2 = 0$
$y = -1 \Rightarrow x = 2 - 4 = -2$ per cui
$E(-2, -1)$

Calcolo delle aree:
Punti: $A(-3, 0)$ $B(0, 3)$ $D(-2, 3)$ $E(-2, -1)$

I° Modo

Triangolo ADB:

base = DB = 2 h = AD = 3 $A_s = \frac{2 \bullet 3}{2} = 3$

Triangolo ABE e rettangolo in A perché inscritto in mezza circonferenza:
base = AE h = AB
Applichiamo la

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$AB = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$AE = \sqrt{(-2+3)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$A_s = \frac{3\sqrt{2} \bullet \sqrt{2}}{2} = 3$

II° Modo

Con la formula di Sarrus:
I punti sono : $A(-3, 0)$ $B(0, 3)$ $D(-2, 3)$ $E(-2, -1)$

Triangolo ADB:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccccc} x_1 & y_1 & 1 & x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & 1 & x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 & 1 & x_3 & y_3 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\left[\left(x_1 y_2 1 + y_1 1 x_3 + 1 x_2 y_3\right) - \left(1 y_2 x_3 + x_1 1 y_3 + y_1 x_2 1\right)\right]$$

− − − + + +

Da cui nel nostro caso:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccccc} -3 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\left[(-9+0+0)-(0-9+6)\right] = \frac{1}{2}(-9+9+6) = 3$$

Triangolo ABE:

Da cui nel nostro caso:

$$A=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccccc} -3 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right| = \frac{1}{2}\left|\left[(-9+0+0)-(0+3-6)\right]\right| = \frac{1}{2}\left|(-9+3)\right| = \left|-3\right| = 3$$

Ultima parte :
Ricerca dei valori di k cui il fascio (k +1)x + y + 2k – 4 = 0 interseca il segmento AB.
Il segmento AB appartiene alla retta per quei punti: A (–3 , 0) B(0, 3), determiniamola mediante la formula

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

nel nostro caso sarà :

$$\frac{y-0}{3-0} = \frac{x+3}{0+3}$$

$$3y = 3x + 9$$

$$x - y + 3 = 0$$

Intersechiamola con il fascio dato, così da determinare le intersezioni in funzione del parametro k. I valori di x ed y però saranno compresi rispettivamente tra :

$$-3 \le x \le 0$$

$$0 \le y \le 3$$

Quindi :

$$\begin{cases} (k+1)x + y + 2k - 4 = 0 \\ y = x + 3 \end{cases}$$

Sostituiamo la 2^ eq.ne nella 1^ ed elaboriamo quest'ultima:

(k + 1)x + x + 3 + 2k – 4 = 0
kx + 2x + 2k – 1 = 0
x(k + 2)+ 2k – 1 = 0
$x = \dfrac{1-2k}{k+2}$ ne consegue per il valore di y

$y = x + 3 = \frac{1-2k}{k+2} + 3 = \frac{1-2k+6+3k}{2+k} = \frac{k+7}{k+2}$

Ora abbiamo le due disequazioni:

$$-3 \le \frac{1-2k}{k+2} \le 0$$

$$0 \le \frac{k+7}{k+2} \le 3$$

Andranno risolte e poi uniti i grafici per determinare le soluzioni comuni, si tenga presente che la prima disequazione equivale al sistema:

$$\begin{cases} \frac{1-2k}{k+2} \ge -3 & \text{(a)} \\ \frac{1-2k}{k+2} \le 0 & \text{(b)} \end{cases}$$

Risolviamo il sistema fratto con il metodo dello studio del segno:
Elaboriamo la (a)

$\frac{1-2k}{k+2} \ge -3 \quad \text{con } k \ne -2$

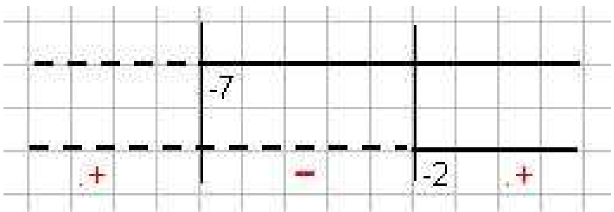
$\frac{1-2k}{k+2} + 3 \ge 0$

$\frac{1-2k+3k+6}{k+2} \ge 0$

$\frac{k+7}{k+2} \ge 0$ la disequazione equivale al sistema:

$$\begin{cases} k + 7 \ge 0 \\ k + 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k \ge -7 \\ k > -2 \end{cases}$$



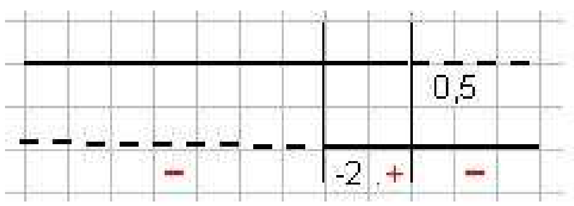
Verificato per $k \le -7$ e per $k > -2$ come dal grafico.

Elaboriamo la (b)

$\frac{1-2k}{k+2} \le 0 \quad \text{con } k \ne -2$

$$\begin{cases} 1 - 2k \ge 0 \\ k + 2 > 0 \end{cases}$$

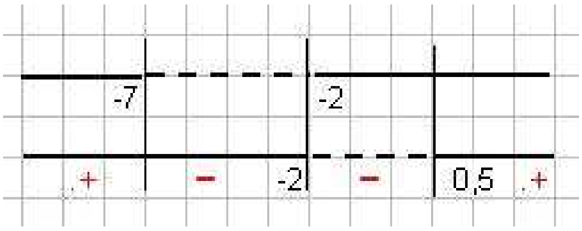
$$\begin{cases} k \le \frac{1}{2} \\ k > -2 \end{cases}$$



Verificato per k < –2 e per $k \geq \frac{1}{2}$ come dal grafico.

Unendo i due intervalli otteniamo le soluzioni come dal grafico:

Soluzioni : $k \leq -7 \quad k \geq \frac{1}{2}$



Analogamente per la $\qquad 0 \leq \frac{k+7}{k+2} \leq 3$

abbiamo:

$$\begin{cases} \frac{k+7}{k+2} \geq 0 & \text{(a')} \quad \text{con } k \neq -2 \text{ caso uguale al precedente e già discusso} \\ \frac{k+7}{k+2} \leq 3 & \text{(b')} \end{cases}$$

Elaboriamo (b') ottenendo:

$$\frac{k+7}{k+2} - 3 \leq 0$$

$$\frac{k+7-3k-6}{k+2} \leq 0$$

$\frac{1-2k}{k+2} \leq 0$ con k ≠ – 2 caso uguale al precedente e già discusso

Stesse soluzioni, le ritroviamo a conferma.

Cerchiamo infine le rette del fascio che distano 1 dal centro della circonferenza.
E' ancora un applicazione della formula

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Dove l'eq. del fascio è (k + 1)x + y + 2k – 4 = 0 il centro è C (–1, 1) e d = 1.

$$\frac{|(k+1) \bullet (-1) + 1 + 2k - 4|}{\sqrt{(k+1)^2 + 1}} = 1$$

$$\frac{|-k - 1 + 1 + 2k - 4|}{\sqrt{k^2 + 2k + 1 + 1}} = 1$$

$$\left[\frac{|-k-1+1+2k-4|}{\sqrt{k^2+2k+1+1}}\right]^2 = (1)^2$$

$(k-4)^2 = 1(k^2 + 2k + 2)$
$k^2 + 16 - 8k = k^2 + 2k + 2$
$10k = 14$
$k = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$
Sostituendo questo valore trovato nel fascio, avremo

$(k + 1)x + y + 2k - 4 = 0$
$(\frac{7}{5} + 1)x + y + \frac{14}{5} - 4 = 0$
$\frac{12}{5}x + y + \frac{14-20}{5} = 0$
$l_1)$ $12x + 5y - 6 = 0$

l_1	x	y
L_1	0	$\frac{6}{5} = 1{,}2$
L_2	$\frac{1}{2}$	0

La l_2 è la retta limite del fascio infatti

$kx + x + y + 2k - 4 = 0$
$x + y - 4 + k(x + 2) = 0$
$l_2)$ $x + 2 = 0$

Infatti a riprova di quanto determinato $d = \frac{|-1+2|}{\sqrt{1}} = 1$

Con questo esercizio concludiamo la carrellata di problemi svolti di geometria analitica sperando di aver fornito una ampia visione delle problematiche e risoluzioni che si possono presentare.

Bibliografia

Autore	Opera	Casa editrice - anno	Volumi
Tonolini	Metodi Analitici	Minerva Italica 1988	I°- II°
Ferrauto	Elementi di Analisi Matematica	Soc. Edit.Dante Alighieri 1986	I°- II°
Nisini	Complementi di Matematica	Trevisini Editore 1966	
Marino	Es. Svolti di Analisi Matematica	Cetim 1993	I°- II°
Bononcini Forlani	Analisi Matematica	Patron Bologna 1973	
Tamagnini - Corbelli	Geometria analitica	Multimedia 2000	

Alla memoria della mia adorata moglie Ester.