LOGARITMO

Premessa

Consideriamo che si sappia risolvere il problema: dati due numeri reali a > 0 e n qualunque (intero, razionale, reale e > = < 0), trovare il numero reale a^n .

Problemi inversi sono :

a) dati il valore di una potenza con base > 0 e il valore dell'esponente, trovare la base.

b) dati il valore di una potenza con base > 0 e il valore della base, trovare l'esponente.

Il primo problema, se indichiamo con x la base, si traduce nell'equazione:

$x^n = b$

L'analisi di tale equazione porta a queste considerazioni:

* se n = 0 e 0 < b diverso da 1 l'equazione non ha soluzioni.

* se n = 0 e b = 1 l'equazione è indeterminata: infatti qualsiasi numero elevato allo "0" dà come valore : 1.

* se n diverso da 0, eleviamo entrambi i membri dell'equazione a $\frac{1}{n}$ e otteniamo:

$x = b^{\frac{1}{n}}$ e quindi x è univocamente determinato.

* se poi n è un numero reale razionale $\frac{p}{q}$ > 0, il valore di x viene determinato estraendo la radice e si ottiene : $b^{\frac{1}{n}} = b^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{b^q}$

Il secondo problema invece è nuovo. Siano a > 0 la base, b il valore della potenza e x l'esponente, l'equazione che risolve il problema è:

$a^x = b$.

Analizzando i vari casi si ha:

* se a = 1 e b diverso da 1, l'equazione è impossibile perché ogni potenza di 1 vale 1.

* se a = 1 e b = 1, l'equazione è indeterminata (qualunque valore di x la soddisfa).

* i casi veramente importanti sono:

- a > 1 e b > 0
- 0 < a <1 e b > 0

e si può dimostrare che in ciascuno di questi casi l'equazione, detta equazione esponenziale,

$a^x = b$ ha una e una sola soluzione.

Esempi:

l’equazione $3^x = 81$ ha come unica soluzione x = 4

l’equazione $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{8}$ ha come unica soluzione x = 3

l’equazione $2^x = \frac{1}{8}$ ha come unica soluzione x = -3

l’equazione $5^x = \frac{1}{625}$ ha come unica soluzione x = -4

Definizione di logaritmo

Il numero x soddisfacente l’equazione esponenziale $a^x = b$ viene chiamato logaritmo in base a di b.

Pertanto si definisce logaritmo (log) in base a di b, l’esponente che si deve dare ad a (la base) per ottenere b.

Esempi:

$\log_{10} 100 = 2$; infatti $10^2 = 100$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$; infatti $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\log_{\frac{5}{4}} \frac{4}{5} = -1$; infatti $\left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{5}$

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{16}{81} = 4$; infatti $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Dalla definizione si deduce che le equazioni:

$a^x = b \qquad x = \log_a b$

sono equivalenti e possono essere scritte anche:

$a^{\log_a b} = b \qquad \log_a a^x = x$

Pertanto, nella stessa base, le due operazioni di innalzamento a potenza e di estrazione di logaritmo applicate successivamente a uno stesso numero non lo cambiano e sono quindi operazioni l’una inversa dell’altra.

Più chiaramente, se si parte da una base assegnata a, la si eleva alla potenza x e poi, di questo numero così ottenuto, si prende il logaritmo in base a, si ottiene ancora il numero x.

Esempi:

a = 10 x = 3 $10^{3} = 1000$ $\log_{10} 1000 = 3 = x$

$\log_{3} x = -\frac{1}{2}$ trovare x; $x = 3^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

Basi dei logaritmi

Le basi di uso comune sono due:

- base 10; i logaritmi sono chiamati volgari o decimali o di Briggs e si indicano generalmente con “log”
- base e; (numero irrazionale il cui valore approssimato è : 2,71828) i logaritmi sono chiamati naturali o neperiani. Vediamo più da vicino questi ultimi.

Logaritmo naturale o neperiano

Un modo molto usato di abbreviare “logaritmo naturale” è quello di scrivere ln.

Ad esempio ln 3 = $\log_e 3$. Il numero **e** è molto importante in matematica e viene definito come

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

Se ad esempio si prova a calcolare il valore della successione si ottiene:

per n =100: 2,7048
n= 100000: 2,71826
n = 1000000: 2,7182805 etc.

Bene, si dimostra che la successione converge, e converge a un numero che è stato battezzato **e** (dal nome del famoso matematico Eulero).

La funzione $y = e^{x}$, che è una funzione esponenziale ha una proprietà molto interessante: la retta tangente alla curva in qualunque punto ha coefficiente angolare che è uguale al valore della funzione in quel punto.

Ad es. e^{x} per x=0 vale 1 ; allora nel punto P (0,1) la retta tangente alla curva ha equazione : $y-1 = 1 \cdot x$ cioè : $y = x+1$.

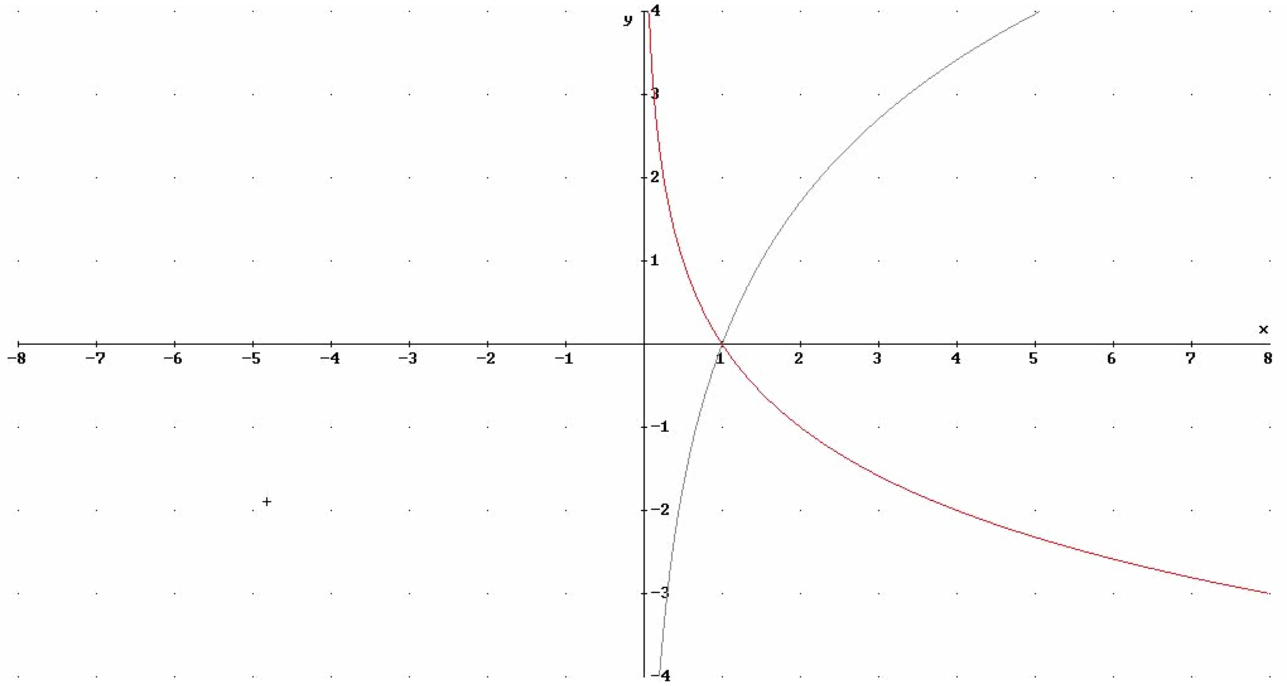
Per x = 1 la funzione e^{x} vale : e ; nel punto Q (1;e) la retta tangente ha equazione : $y-e = e\,(x-1)$. Tutto questo dipende dal fatto che la derivata della funzione : $y = e^{x}$ è ancora e^{x}; anzi è l'unica funzione la cui derivata è uguale alla funzione stessa.

L'interpretazione geometrica della derivata di una funzione f(x)
è infatti questa: essa rappresenta il valore del coefficiente angolare
della retta tangente in quel punto alla curva avente per equazione : y = f(x).

Funzione logaritmica e curva logaritmica

La funzione $y = \log_a x$ (0<a diverso da 1, x>0), che dà il logaritmo della variabile x, si chiama funzione logaritmica e il grafico corrispondente curva logaritmica.

Il grafico in blu rappresenta la funzione sopraccitata con a>1, quello in rosso con 0<a<1.



In accordo con quando detto sulle potenze dei numeri reali positivi e osservando i grafici suddetti si può affermare che:

a) lo 0 e i numeri negativi non hanno logaritmi reali, qualunque sia la base reale a (positiva).

Es: log 0: non esiste; log -10: non esiste (in qualunque base)

b) il logaritmo della base è 1, qualunque sia la base.

Es: $\log_a a = 1$ perché $a^1 = a$

c) il logaritmo di 1 è 0 in qualsiasi base.

Es: $\log_a 1 = 0$ perché $a^0 = 1$

d) base a > 1: al crescere di x da 0 a $+\infty$, il logaritmo di x cresce continuamente da $-\infty$ a $+\infty$ e si mantiene negativo per x<1, è positivo per x > 1 ed è nullo per x = 1.

e) base $0 < a < 1$: al crescere di x da 0 a $+\infty$, il logaritmo di x decresce continuamente da $+\infty$ a $-\infty$ e si mantiene positivo per $x < 1$, è negativo per $x > 1$ ed è nullo per $x = 1$.

Proprietà dei logaritmi : derivano dalle proprietà delle potenze.

I) Il logaritmo di un prodotto è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori.

Per semplicità consideriamo solo due fattori, ma la proprietà vale per un numero qualunque di fattori:

$\text{Log}_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

Infatti se indichiamo con x, y rispettivamente i logaritmi in base a di m, n, si ha per definizione:

$a^x = m \qquad a^y = n$ moltiplicando membro a membro:

$a^{x+y} = m \cdot n$ da cui sempre per definizione si ottiene:

$x + y = \log_a(m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$

Questa uguaglianza letta da destra verso sinistra significa che la somma dei logaritmi di più numeri è uguale al logaritmo del loro prodotto.

Es: $\log (3 \cdot 5 \cdot 7) = \log 3 + \log 5 + \log 7$; $\log 2 + \log 17 = \log (2 \cdot 17) = \log 34$

II) Il logaritmo di un quoziente è uguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e quello del divisore

$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

Infatti se indichiamo con x, y rispettivamente i logaritmi in base a di m e n, è per definizione:

$a^x = m \qquad a^y = n$ e dividendo membro a membro:

$a^{x-y} = \frac{m}{n}$ da cui: $\log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n$

Questa uguaglianza letta da destra verso sinistra dice che la differenza tra i logaritmi di due numeri è uguale al logaritmo del quoziente del primo per il secondo.

In particolare si ha:

$\log \frac{1}{m} = \log 1 - \log m = -\log m$

Cioè: i logaritmi di due numeri inversi l'uno dell'altro hanno uguale valore assoluto e segno opposto.

Esempi:

$\log \frac{5}{27} = \log 5 - \log 27$; $\log \frac{3}{4} = -\log \frac{4}{3}$;

$\log 5 + \log 7 - \log 2 = \log (5 \cdot 7) - \log 2 = \log \left(5 \cdot \frac{7}{2}\right) = \log \frac{35}{2}$;

$\log 6 - \log 11 - \log 23 = \log 6 - (\log 11 + \log 23) = \log 6 - \log(11 \cdot 23) =$

$\log \left(\frac{6}{11} \cdot 23\right)$

III) <u>Il logaritmo di una potenza è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base:</u>

$\log_a m^n = n \cdot \log_a m$

Infatti, indicato con x il logaritmo di m nella base a, è per definizione:

$a^x = m$ ed elevando entrambi i membri all'esponente n si ottiene:

$a^{nx} = m^n$ da cui

$\log_a m^n = n \cdot x = n \cdot \log_a m$

Questa uguaglianza letta da destra verso sinistra dice che il prodotto di un numero per il logaritmo di un altro è uguale al logaritmo della potenza che ha per base il secondo numero e per esponente il primo.

Esempi:

$\log_a 5^2 = 2 \cdot \log_a 5$

$\log_a \left(\frac{3}{7}\right)^5 = 5 \cdot \log_a \frac{3}{7} = 5 \cdot (\log_a 3 - \log_a 7)$

$4 \times \log_a 2 = \log_a 2^4 = \log_a 16$

$\log_a \frac{5^2}{11^2} = \log_a 5^2 - \log_a 11^2 = 2 \cdot \log_a 5 - 2 \cdot \log_a 11$

$2 \cdot \log_a 9 + \log_a 3 - \log_a 6 = \log_a 9^2 + \log_a 3 - \log_a 6 = \log_a \left(\frac{9^2 \cdot 3}{2 \cdot 3}\right) = \log_a \frac{9^2}{2}$

Poiché i teoremi sulle potenze valgono per esponenti reali qualsiasi, il teorema precedente per $n = \frac{1}{p}$ (con p intero positivo) dà, essendo $m^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{m}$:

$\log_a \sqrt[p]{m} = \frac{1}{p} \log_a m$

cioè il logaritmo di un radicale è uguale al quoziente fra il logaritmo del radicando m e l'indice p della radice.

Inversamente il quoziente, per un numero intero, del logaritmo di un altro numero è uguale al logaritmo di un radicale avente per indice il primo numero e per radicando il secondo.

Esempi : $\log_a \sqrt{5} = \frac{1}{2}\log_a 5$; $\log_a \sqrt[3]{5} = \frac{1}{3}\log_a 5$

$\frac{1}{5}(\log_a 2 + \log_a 3) = \frac{1}{5}\log_a (2 \cdot 3) = \frac{1}{5}\log_a 6 = \log_a \sqrt[5]{6}$

Applichiamo i teoremi sopra enunciati al calcolo dei logaritmi delle seguenti espressioni:

$\log_a \frac{2 \cdot d^3 \cdot b^2 \cdot \sqrt{c}}{d^2 + b^2} = \log_a |2 \cdot d^3 \cdot b^2 \cdot \sqrt{c}| - \log_a (d^2+b^2) =$

$\log_a 2 + 3\log_a d + 2\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c - \log_a(d^2+b^2)$

Calcolare la seguente espressione :

$\log_2\left(4 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}}\right) = \log_2 2^2 + \log_2 \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2}} = 2\log_2 2 + \frac{1}{3}(\log_2 2 + \frac{1}{2}\log_2 2) =$

$2 + \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$

Ricapitolando, in base ai teoremi fondamentali sopra riportati, è possibile,mediante i logaritmi, calcolare il valore di un prodotto, di un quoziente, di una potenza, di una radice, rispettivamente mediante una somma, una sottrazione , una moltiplicazione, una divisione.

Passaggio da un sistema di logaritmi in base a ad un altro in base b (cambiamento di base)

Molte volte occorre conoscere il logaritmo y di un numero N in una base a, conoscendone quello x in base b e viceversa .

Per definizione si ha :

$y = \log_a N$ e $x = \log_b N$

quindi ne consegue :

$a^y = N$ e $b^x = N$ e pertanto :

$a^y = b^x$ e prendendo i logaritmi in base b di entrambi i membri si ottiene:

$y \log_b a = x$ da cui : $y = \frac{1}{\log_b a} x$ e prendendo invece i logaritmi in base a si ottiene :

$y = x \log_a b$ da cui : $x = \frac{1}{\log_a b} y$

Il fattore $\frac{1}{\log_b a}$ (e similmente $\frac{1}{\log_a b}$) si chiama modulo di trasformazione per il passaggio dal sistema di logaritmi a base b al sistema di logaritmi a base a e dipende esclusivamente dalle due basi a, b.

Pertanto se si pone $M = \frac{1}{\log_b a}$ si ottiene :

$\log_a N = M \cdot \log_b N$

che si può enunciare : il logaritmo di un numero qualunque a base a è uguale al prodotto del modulo di trasformazione per il logaritmo dello stesso numero a base b.

Esempio : supponiamo di conoscere il logaritmo in base 5 di tutti i numeri ; si ha allora

$\log_3 12 = \log_5 12 \cdot \frac{1}{\log_5 3}$ e con questa formula si ottengono i logaritmi di tutti i numeri in base 3.

Tavole logaritmiche

Queste tavole danno per ogni numero (ad es. da 1 a 10000 oppure da 1 a 100000) il logaritmo in base 10, e erano molto usate per semplificare ed accelerare il calcolo di espressioni monomie anche complicate, sfruttando il fatto che il logaritmo del prodotto di n fattori numerici è uguale alla somma dei logaritmi dei fattori : pertanto un prodotto veniva ridotto a una somma (un quoziente a una differenza).

Naturalmente le tavole erano usate anche per il processo inverso : passare dal logaritmo al numero e ottenere così il numero cercato.

Oggigiorno la grande diffusione di “pocket calculators” assai potenti nonché ovviamente di PC potentissimi, ha, per la fortuna degli utilizzatori, cancellato la necessità di usare le tavole dei logaritmi per svolgere calcoli, che vengono agevolmente eseguiti dai calcolatori sopra citati.

Solo un semplice esempio : calcolare **manualmente** il valore dell’espressione:

$$\sqrt[7]{\frac{1,2^5 \cdot 793^4}{\sqrt{5260} \cdot 9834}}$$

Oggi il calcolo viene svolto facilmente con un pocket calculator: quando non esistevano, i conti andavano fatti manualmente e si usavano le tavole logaritmiche .

Se la espressione da calcolare viene chiamata x, allora si ha, utilizzando i teoremi sui logaritmi sopra descritti :

$\log_{10} x = \frac{1}{7}(5\cdot\log_{10} 1{,}2+4\cdot\log_{10} 793-\frac{1}{2}\log_{10} 5260-\log_{10} 9834)$.

Facendo buon uso delle tavole si ottiene alla fine :

$\log_{10} x = 0{,}87711$ da cui, usando sempre le tavole in senso inverso, si ha finalmente :

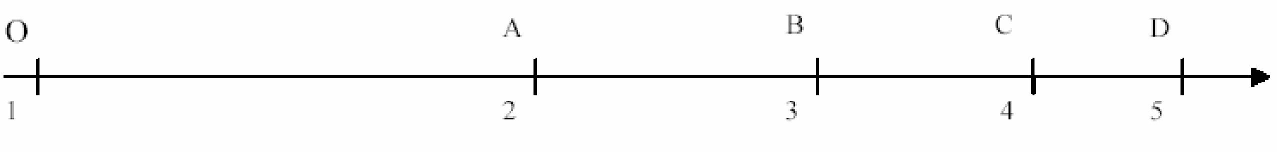
$x = 7{,}5355$.

Scale logaritmiche

Su una retta X orientata, si fissi un punto O, come origine e un segmento h, come unità; si riportino, a partire dal punto O, i segmenti OA, OB, OC, OD, …che misurano, rispetto ad h, i logaritmi decimali dei numeri 2, 3, 4, 5, 6 …. si ha quindi:

OA= $\log_{10} 2\, h = 0{,}30..h$
OB= $\log_{10} 3\, h = 0{,}47..h$
OC= $\log_{10} 4\, h = 0{,}60..h$
OD= $\log_{10} 5\, h = 0{,}69..h$
....
....

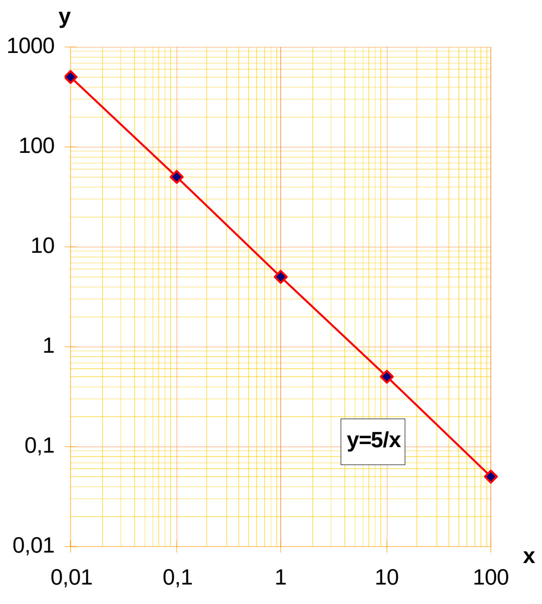
....
....
OI= $\log_{10} 10\, h = h$
Sotto gli estremi di questi segmenti si segnino i numeri 1, 2, 3, 4, 5, ….10
Sotto al punto O si può segnare il numero 1 perché $\log_{10} 1 = 0$.
A un punto Q generico della retta X corrisponde il numero reale x, tale che si abbia
OQ= $\log_{10} kx$



Questo segmento viene poi ripetuto infinite volte verso destra.
Si è così stabilita sulla retta X una scala logaritmica. È facile rendersi conto che se due punti distano fra di loro di un valore pari ad h, allora le loro quote sono due numeri che stanno fra di loro nel rapporto 10 (nella lista sopra riportata OI=h, O corrisponde a 1 e I corrisponde a 10); se due punti distano fra di loro di un valore pari a 2h, allora le loro quote sono numeri che stanno nel rapporto 100 etc.
A questo punto si possono introdurre le coordinate cartesiane logaritmiche: su due assi perpendicolari X,Y aventi la stessa origine O, si costruiscano due scale logaritmiche .
Si crea così un sistema di coordinate cartesiane logaritmiche .

Un generico punto P del piano logaritmico ha coordinate X e Y legate alle rispettive quote x e y dalle relazioni:
X= log x e Y= log y
L'uso delle coordinate logaritmiche semplifica la rappresentazione grafica di funzioni del tipo :
$x^p \times y^q = b$ infatti se b >0 si ottiene
p log x + q log y =log b e ponendo
X= log x Y= log y si ha
PX+QY = log b che nel piano X,Y rappresenta una retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Es. consideriamo l'equazione : xy =5 che rappresenta nel piano cartesiano xOy una iperbole equilatera situata nel primo e terzo quadrante.
Consideriamo il ramo situato nel primo quadrante (x>0, y>0); si può allora applicare i logaritmi (ad es. in base 10) e si ottiene :
$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10} 5$ e quindi :
$X+Y= \log_{10} 5$ che rappresenta nel piano XOY una retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante, come si può vedere dal diagramma riportato sotto.



Diagrammi con scale logaritmiche (o semilogaritmiche quando uno solo degli assi usi una scala logaritmica) sono molto utili per rappresentare fenomeni fisici che coinvolgono una grandissima escursione fra valori minimi e massimi: esempio classico è quello del grafico che porta in ascisse la distanza in km e in ordinate l'attenuazione di spazio libero di onde elettromagnetiche: l'attenuazione per una distanza di 160 km è circa 2500 volte rispetto all'attenuazione che si ha per una distanza di 3 km.
È chiaro che con tali rapporti (2500 a 1) una rappresentazione con grafico ad assi metrici non è possibile: se si usa invece una scala logaritmica per l'attenuazione allora si ottiene un'escursione massima di 3,4 circa (essendo $\log_{10} 2500 = 3,39$); è poi pratica comune nelle Telecomunicazioni moltiplicare per 10 il valore ottenuto, arrivando così a 34 db (decibel, abbreviato db, è l'unità usata per calcolare i rapporti di potenze).